



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES**
Ciencia, Tecnología y Humanismo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Polinomios ortogonales matriciales de Hermite

*SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN Y/O DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA OPTAR AL TÍTULO DE GRADO DE
LA LICENCIATURA EN CIENCIAS BÁSICAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICA*

MICAELA ARACELI VIRGA

DIRECTORA: LIC. YANINA GONZÁLEZ

MARZO 2023

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a la Universidad Nacional de Cuyo, por darme la posibilidad de formarme en una institución pública, laica y gratuita. A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por brindarme un espacio de estudio que se transformó en mi segundo hogar. A todos los docentes que contribuyeron a mi formación.

Al Consejo Interuniversitario Nacional, por otorgarme la beca EVC-CIN. A la Secretaría de Investigación, Internacionales y Posgrado, por financiar el proyecto en el que se enmarcó este seminario.

A mi directora, Lic. Yanina González. Sin su guía y apoyo nada de esto hubiera sido posible.

A mi familia, a mis amigos de siempre, y a los nuevos que encontré en este hermoso camino. Sin duda son mis pilares en esta vida.

Índice general

1. Introducción	4
2. Funciones clásicas	7
2.1. Polinomios ortogonales clásicos	7
2.1.1. Propiedades de polinomios ortogonales clásicos	10
2.2. Polinomios ortogonales hipergeométricos	16
2.2.1. Función hipergeométrica de Gauss	16
2.2.2. Función hipergeométrica confluyente	25
2.2.3. Problema de Bochner	28
2.3. Polinomios de Hermite	30
3. Polinomios ortogonales matriciales	35
3.1. Definiciones y teoría general de polinomios ortogonales matriciales	35
3.1.1. Propiedades de polinomios ortogonales matriciales	40
3.2. Teoría general de operadores diferenciales matriciales	43
4. Polinomios matriciales de Hermite	46
4.1. Resultados	51
4.1.1. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ es no inversible y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ es inversible, $\forall n \in \mathbb{N}_0$	52
4.1.2. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ es inversible y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ es no inversible, $\forall n \in \mathbb{N}_0$	58
4.1.3. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son no inversibles, $\forall n \in \mathbb{N}_0$	59

4.1.4. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son inversibles, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ 59

5. Conclusiones **64**

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo de la teoría de polinomios ortogonales comenzó en el siglo XVIII con la resolución de problemas de aplicación práctica en la física, entre ellos, la teoría de la gravedad de Newton.

La primer familia de polinomios fue introducida por Adrien-Marie Legendre en 1782 cuando estudiaba el problema de atracción de un cuerpo por una esfera. En 1784 Legendre probó algunas propiedades significativas, como que estos polinomios eran ortogonales y sus ceros eran reales, distintos entre sí.

La siguiente familia fue estudiada por Charles Hermite en 1864, aunque Laplace y Chebyshev los consideraron antes en problemas de teoría de probabilidad. Esta familia de polinomios está relacionada con problemas de mecánica cuántica.

Más adelante se conoció la familia denominada de Laguerre L_n^α , en principio estudiada por Niels Abel y Joseph-Louis Lagrange, pero fue Pafnuti Chebyshev quien los desarrolló en profundidad en 1859. En 1879 Edmond Laguerre estudia el caso particular para $\alpha = 0$. Finalmente, Carl Jacobi introduce una familia de polinomios que generaliza los polinomios de Legendre, publicado en 1859 en una obra póstuma.

Las familias de polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi son las más estudiadas debido a su aparición en problemas de física y matemática aplicada. A estas familias se las denomina familias de polinomios ortogonales clásicos. A lo largo de los años se han estudiado qué propiedades y características comparten. Una de las características en común es que son soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden de tipo hipergeométrica

$$\sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} p_n(x) + \tau(x) \frac{d}{dx} p_n(x) + \lambda_n p_n(x) = 0,$$

donde $\sigma(x)$, $\tau(x)$ y λ_n son de grado 2, 1 y 0 respectivamente. Salomon Bochner en 1929, en su tratado “Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme” [2], caracterizó a las familias de Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel como soluciones de diferentes ecuaciones diferenciales hipergeométricas de segundo orden, dichas familias son las únicas soluciones de este tipo de ecuación. Los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales, respectivamente:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} + (\delta + \epsilon x) \frac{d}{dx} + \lambda \\ & x \frac{d^2}{dx^2} + (\delta + \epsilon x) \frac{d}{dx} + \lambda \\ & x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + (\delta + \epsilon x) \frac{d}{dx} + \lambda \end{aligned}$$

Otra característica de las familias de polinomios ortogonales es que sus derivadas también son familias de polinomios ortogonales y autofunciones de un operador diferencial de tipo hipergeométrico. Además, pueden expresarse en términos de la fórmula de Rodrigues

$$\frac{B_n}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\omega(x)],$$

nombrada así en honor a Olinde Rodrigues, quien presentó este resultado, relacionado a polinomios de Legendre, en 1816. En esta fórmula $\omega(x)$ es la función de peso respecto de la cual son ortogonales las familias de polinomios.

Por último, una propiedad que verifican las familias de polinomios ortogonales clásicos es una relación de recurrencia de tres términos del tipo

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x).$$

En 1939 Gábor Szegő reunió todos los resultados conocidos hasta el momento en su libro “Orthogonal polynomials” [39].

Los polinomios ortogonales matriciales fueron introducidos por Mark Krein en 1949 [31]. Más adelante, se comenzó a estudiar si en el caso matricial se cumplían las mismas propiedades que en el caso escalar, como la relación de recurrencia, el teorema de Favard, la fórmula de Rodrigues, entre otros. Antonio Durán, en su trabajo publicado en 1997 [16], realizó un estudio similar al de Bochner para el caso matricial, buscando familias de polinomios matriciales que sean autofunción de un operador diferencial hipergeométrico matricial de segundo orden del tipo

$$D = A_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1 \frac{d}{dx} + A_0$$

donde A_2 , A_1 y A_0 son polinomios matriciales de grado a lo sumo 2, 1 y 0 respectivamente. A diferencia del caso escalar, el caso matricial presenta una dificultad extra ya que el producto entre matrices no es conmutativo, por lo que es necesario definir si el operador diferencial actúa a derecha o izquierda.

En principio, se desarrollaron dos métodos para encontrar familias de polinomios ortogonales matriciales. Uno de ellos utiliza técnicas de representación de grupos para obtener funciones esféricas matriciales asociadas al espacio proyectivo complejo [16, 26, 29]. El segundo método desarrollado busca resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales matriciales, planteando que el operador diferencial D sea simétrico respecto a una matriz de peso $W(x)$ que hace ortogonal a la familia de polinomios matriciales [18, 20, 21, 26]. Así, se busca resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$WA_2 = A_2^*W$$

$$2(WA_2)' = A_1^*W + WA_1$$

$$(WA_2)'' - (WA_1)' + WA_0 = A_0^*W$$

con ciertas condiciones de contorno.

En los últimos años se han encontrado ejemplos de familias de polinomios matriciales ortogonales que verifican una ecuación diferencial de segundo orden de tipo hipergeométrico. En particular, familias de polinomios matriciales de Hermite de orden 2×2 han sido estudiadas en [3, 10, 12, 19, 20, 28].

El objetivo de este trabajo es encontrar familias de polinomios ortogonales mónicos de tamaño 2×2 que sean autofunciones de un operador diferencial hipergeométrico matricial de segundo orden con autovalor diagonal. El método utilizado busca determinar las condiciones necesarias que los parámetros del operador diferencial de segundo orden deben verificar para que sus autofunciones sean polinomios matriciales mónicos, a partir de los cuales construimos familias completas de polinomios ortogonales respecto a una función de peso matricial [6].

El presente trabajo está estructurado en cinco capítulos. El primero de ellos es esta introducción.

En el segundo capítulo se desarrollan nociones básicas sobre la teoría de polinomios ortogonales clásicos, una introducción a la función hipergeométrica de Gauss, la función hipergeométrica Confluente y se menciona el problema de Bochner.

En el tercer capítulo se generalizan los resultados del capítulo 2 al caso matricial y se desarrolla la teoría de operadores diferenciales matriciales.

En el cuarto capítulo se encuentra el aporte principal de este trabajo. Se desarrolla el método utilizado para hallar familias de polinomios matriciales mónicos que sean autofunción de un operador diferencial y sean ortogonales respecto a un peso, y se presentan los resultados obtenidos.

Por último, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y un resumen de los principales resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Capítulo 2

Funciones clásicas

2.1. Polinomios ortogonales clásicos

En esta sección desarrollaremos la teoría clásica de polinomios ortogonales y veremos las propiedades principales que los caracterizan. Estos resultados están basados en los textos [1, 4, 14, 33, 39].

Definición 2.1. Denotamos el espacio vectorial de todos los polinomios con variable real x y coeficientes complejos como $\mathbb{C}[x]$.

$$\mathbb{C}[x] = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

Si $a_n \neq 0$ diremos que el polinomio es de grado n y lo notamos $gr(p) = n$, a_n se denomina coeficiente principal. Además, si $a_n = 1$ decimos que el polinomio es mónico.

Definición 2.2. Un **producto interno** en un espacio vectorial V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple, para todo $f, g, h \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, las siguientes propiedades:

i) $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0$ si y sólo si $f = 0$,

ii) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,

iii) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$.

Observemos que un espacio vectorial con un producto interno es un espacio normado, con norma $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$.

Definición 2.3. Dada una función $\alpha(x)$ no decreciente y acotada en \mathbb{R} , la llamamos **m-distribución** si toma infinitos valores distintos y sus momentos, esto es, las integrales

$$\int_{\mathbb{R}} x^n d\alpha(x),$$

existen y son finitas $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Si $\alpha(x)$ es absolutamente continua, entonces

$$d\alpha(x) = \omega(x)dx$$

donde $\omega(x)$, es no negativa e integrable en \mathbb{R} .

En adelante consideraremos a las m-distribuciones como $d\alpha(x) = \omega(x)dx$.

Definición 2.4. Una función $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de **peso** si es positiva y sus momentos

$$\mu_n = \int_a^b x^n \omega(x) dx$$

existen y son finitos para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 2.1. Dada una función de peso ω en un intervalo $[a, b]$, se tiene que $\forall f, g \in \mathcal{C}[a, b]$

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx$$

es un producto interno en $\mathcal{C}[a, b]$.

Demostración. Sean $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$i) \langle f, f \rangle_\omega = \int_a^b f(x) \overline{f(x)} \omega(x) dx = \int_a^b \|f(x)\|^2 \omega(x) dx$$

Como $\|f(x)\|^2 \omega(x) \geq 0$ en casi todo punto, entonces $\int_a^b \|f(x)\|^2 \omega(x) dx \geq 0$.

Por otro lado, si $f = 0$ claramente $\langle f, f \rangle_\omega = 0$.

Si $\langle f, f \rangle_\omega = 0$, como $\omega(x)$ es positiva en casi todo punto, entonces $f = 0$.

ii) Como $\omega(x) \in \mathbb{R}$, entonces $\omega(x) = \overline{\omega(x)}$, usando las propiedades de conjugación se obtiene

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx = \overline{\int_a^b \overline{f(x)} g(x) \omega(x) dx} = \overline{\langle g, f \rangle_\omega}.$$

iii) Utilizando la linealidad de la integral obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle_\omega &= \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \overline{h(x)} \omega(x) dx \\ &= \int_a^b \alpha f(x) \overline{h(x)} \omega(x) dx + \int_a^b \beta g(x) \overline{h(x)} \omega(x) dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x) \overline{h(x)} \omega(x) dx + \beta \int_a^b g(x) \overline{h(x)} \omega(x) dx \\ &= \alpha \langle f, h \rangle_\omega + \beta \langle g, h \rangle_\omega. \end{aligned}$$

□

Definición 2.5. Sea $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}[x]$, decimos que la familia de polinomios es **ortogonal** respecto a una función de peso $\omega(x)$ si $\text{gr}(p_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}_0$ y

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle_\omega = \int_a^b p_n(x) \overline{p_m(x)} \omega(x) dx = 0,$$

siempre que $n \neq m$.

Si además se cumple que $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle_\omega = 1$, decimos que son **ortonormales**.

Observación 2.1. Notemos que, $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x], \langle p(x), q(x) \rangle_\omega < \infty$. Esto se deduce de que los momentos de la función de peso ω son finitos. Es decir, si $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$, entonces

$$\langle p(x), q(x) \rangle_\omega = \left\langle \sum_{k=0}^n a_k x^k, \sum_{j=0}^m b_j x^j \right\rangle_\omega = \sum_{k,j=0}^{n,m} a_k \overline{b_j} \int_a^b x^{k+j} \omega(x) dx < \infty$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}[x]$ es un espacio vectorial con producto interno.

Teorema 2.2 (Existencia y unicidad). Dada una función de peso $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existe una única familia de polinomios $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ que cumple las siguientes propiedades

i) $p_n(x) = \gamma_n x^n + r_{n-1}(x)$, con $\gamma_n > 0$ y $r_{n-1} \in \mathbb{C}[x]$ de grado a lo sumo $n - 1$.

$$ii) \int_{\mathbb{R}} p_n(x) \overline{p_m(x)} \omega(x) dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Demostración. Para probar la existencia utilizamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Consideremos la colección $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ que es una base de $\mathbb{C}[x]$, realizamos el siguiente proceso.

$$P_0(x) = \frac{1}{\langle x^0, x^0 \rangle}.$$

$$\text{Sea } U_1(x) = x - \langle P_0, x \rangle P_0, \text{ entonces } P_1(x) = \frac{U_1(x)}{\langle U_1(x), U_1(x) \rangle}.$$

$$\text{Sea } U_k(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle P_i(x), x^k \rangle P_i(x), \text{ entonces } P_k(x) = \frac{U_k(x)}{\langle U_k(x), U_k(x) \rangle}, \text{ con } k \geq 2.$$

Claramente, la familia de polinomios $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortonormal por la forma en que fue construida.

Notemos que $P_n(x) = \left(x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle P_i(x), x^n \rangle P_i(x) \right) \frac{1}{\langle U_n(x), U_n(x) \rangle}$. Entonces tomando $\gamma_n = \frac{1}{\langle U_n, U_n \rangle} > 0$, obtenemos la condición (i).

Para demostrar la unicidad supongamos que existen $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ dos familias de polinomios ortonormales que verifican (i) y (ii). Por inducción probaremos que $p_n(x) = q_n(x), \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Si $n = 0$, entonces $p_0(x) = a_0$ y $q_0(x) = b_0$. Por la segunda condición tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} a_0^2 \omega(x) dx = 1 = \int_{\mathbb{R}} b_0^2 \omega(x) dx,$$

entonces $a_0^2 = b_0^2$ y del hecho de que a_0 y b_0 son positivos concluimos que $a_0 = b_0$.

Supongamos que $p_m(x) = q_m(x) \forall m < n$. Como p_n pertenece al espacio generado por $\{q_k\}_{k=0}^n$ tenemos que

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i q_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x) + c_n q_n(x),$$

donde $c_i = \langle p_n, q_i \rangle$, por la segunda condición, $c_i = 0 \forall i < n$. Entonces, $p_n(x) = c_n q_n(x)$.

Usando un razonamiento similar al caso $n = 0$, tenemos que $c_n = 1$. Así, $p_n(x) = q_n(x)$. \square

Corolario 2.3. *En particular, para una función de peso ω existe una única familia de polinomios ortogonales mónicos.*

Observación 2.2. *Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios ortonormales respecto a una función de peso ω . Entonces la familia de polinomios $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida como*

$$q_n(x) = \alpha_n p_n(x),$$

con $\alpha_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es ortogonal respecto a ω .

Proposición 2.4. *Sea $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios ortogonales. Entonces $\langle q(x), p_n(x) \rangle_\omega = 0$ para todo $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado menor o igual a $n - 1$.*

Demostración. Sea $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, entonces pertenece al espacio generado por $\{p_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, es decir, $q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p_k(x)$. Por lo tanto,

$$\langle q(x), p_n(x) \rangle_\omega = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \langle p_k(x), p_n(x) \rangle_\omega = 0.$$

\square

2.1.1. Propiedades de polinomios ortogonales clásicos

Teorema 2.5 (Recursión de tres términos). *Sea $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios ortogonales respecto a un peso ω , con coeficiente principal $\gamma_n > 0$. Entonces, la familia de polinomios satisface una relación de recurrencia de tres términos de la forma:*

$$x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_{n-1} p_{n-1}(x),$$

donde $p_{-1}(x) = 0$, $c_{-1} = 0$ y

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}, \\ b_n &= \frac{\langle x p_n(x), p_n(x) \rangle_\omega}{\|p_n\|^2}, \\ c_{n-1} &= \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}. \end{aligned}$$

Demostración. Notemos que $xp_n(x)$ es un polinomio de grado $n + 1$, entonces existen ciertos $d_i \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq n + 1$ tales que

$$xp_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} d_i p_i(x).$$

Observemos que

$$\langle xp_n(x), q(x) \rangle_\omega = \int_{\mathbb{R}} xp_n(x) \overline{q(x)} \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}} p_n(x) \overline{xq(x)} \omega(x) dx = \langle p_n, xq \rangle_\omega.$$

Entonces por el corolario anterior, para todo polinomio q de grado $n - 2$, se cumple $\langle xp_n, q \rangle = \langle p_n, xq \rangle = 0$. En particular $\langle xp_n, p_k \rangle = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$.

Como $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una familia ortogonal,

$$\langle xp_n, p_k \rangle_\omega = \sum_{i=0}^{n+1} d_i \langle p_i, p_k \rangle = d_k \langle p_k, p_k \rangle = d_k \|p_k\|^2.$$

Por lo tanto, $d_0 = d_1 = \dots = d_{n-2} = 0$, es decir,

$$xp_n(x) = d_{n+1} p_{n+1}(x) + d_n p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Si en cada miembro analizamos el coeficiente principal tenemos que

$$d_{n+1} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} > 0.$$

Para el coeficiente d_n tenemos

$$\langle xp_n, p_n \rangle_\omega = \langle d_{n+1} p_{n+1} + d_n p_n + d_{n-1} p_{n-1}, p_n \rangle_\omega = \langle d_n p_n, p_n \rangle_\omega = d_n \|p_n\|^2.$$

Por lo tanto, $d_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle_\omega}{\|p_n\|^2}$.

Por último, analizamos el siguiente producto interno

$$\langle xp_n, p_{n-1} \rangle_\omega = \langle d_{n+1} p_{n+1} + d_n p_n + d_{n-1} p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_\omega = \langle d_{n-1} p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_\omega = d_{n-1} \|p_{n-1}\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle xp_n, p_{n-1} \rangle_\omega = \langle p_n, xp_{n-1} \rangle_\omega = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \|p_n\|^2.$$

Por lo tanto, $d_{n-1} = \frac{\gamma_{n-1} \|p_n\|^2}{\gamma_n \|p_{n-1}\|^2}$.

□

Corolario 2.6. Sea $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios ortonormales respecto a un peso ω . Entonces, la familia de polinomios satisface una relación de recurrencia de tres términos de la forma

$$xp_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x),$$

donde $a_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}$ y $b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

El siguiente resultado es el recíproco del teorema de recursión de tres términos.

Teorema 2.7 (Teorema de Favard). Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ y $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios que satisfacen la siguiente relación de recurrencia de tres términos

$$xp_n(x) = a_n p_{n-1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n+1} p_{n+1}(x),$$

con $p_{-1} = 0$ y $p_0 = \gamma_0 > 0$. Entonces existe una m -distribución ω tal que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = 0,$$

siempre que $n \neq m$.

Demostración. Sea $p_n = \sum_{k=0}^n d_k x^k$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p_0(x) = 1$, y definimos

$$\langle p_0(x), p_0(x) \rangle = \mu_0 = a_0,$$

$$\langle p_0(x), p_n(x) \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, por la relación de recurrencia de tres términos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_0(x), p_1(x) \rangle = \left\langle p_0(x), \frac{xp_0(x) - a_0 p_{-1}(x) - b_0 p_0(x)}{a_1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{a_1} (\langle p_0(x), xp_0(x) \rangle - b_0 \langle p_0(x), p_0(x) \rangle) = \frac{\mu_1 - b_0 \mu_0}{a_1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu_1 = b_0 \mu_0$.

Del mismo modo calculamos μ_2 ,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_0(x), p_2(x) \rangle = \left\langle p_0(x), \frac{xp_1(x) - a_1 p_0(x) - b_1 p_1(x)}{a_2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{a_2} (\langle p_0(x), xp_1(x) \rangle - a_1 \langle p_0(x), p_0(x) \rangle - b_1 \langle p_0(x), p_1(x) \rangle) \\ &= \frac{d_1 \mu_2 - d_0 \mu_1 - a_1 \mu_0}{a_2} \\ &= \frac{d_1 \mu_2 - (d_0 b_0 + a_1) \mu_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Despejando, $\mu_2 = \frac{b_0 d_0 + a_1}{d_1} \mu_0$.

Reiterando el procedimiento obtenemos la sucesión de momentos $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Observemos que, para $n \geq 2$

$$\langle xp_n(x), p_0(x) \rangle = a_n \langle p_{n-1}(x), p_0(x) \rangle + b_n \langle p_n(x), p_0(x) \rangle + a_{n+1} \langle p_{n+1}(x), p_0(x) \rangle = 0;$$

para $n \geq 3$

$$\langle x^2 p_n(x), p_0(x) \rangle = a_n \langle xp_{n-1}(x), p_0(x) \rangle + b_n \langle xp_n(x), p_0(x) \rangle + a_{n+1} \langle xp_{n+1}(x), p_0(x) \rangle = 0.$$

Por lo tanto, para $0 \leq k < n$, $\langle x^k p_n(x), p_0(x) \rangle = 0$.

Luego, para $k = n$

$$\begin{aligned}
\langle x^n p_n(x), p_0(x) \rangle &= \langle x^{n-1}(x p_n(x)), p_0(x) \rangle \\
&= \langle x^{n-1}(a_n p_{n-1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n+1} p_{n+1}(x)), p_0(x) \rangle \\
&= a_n \langle x^{n-1} p_{n-1}(x), p_0(x) \rangle \\
&= a_n \langle x^{n-2}(x p_{n-1}(x)), p_0(x) \rangle \\
&= a_n [\langle x^{n-2}(a_{n-1} p_{n-2}(x) + b_{n-1} p_{n-2}(x) + a_n p_n(x)), p_0(x) \rangle] \\
&= a_n a_{n-1} \langle x^{n-2} p_{n-2}, p_0(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Continuando con el procedimiento,

$$\langle x^n p_n(x), p_0(x) \rangle = a_n a_{n-1} \dots a_1 \mu_0.$$

De esto se deduce que, si $n \neq m$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m < n$, entonces

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \sum_{k=0}^n \langle p_n(x), c_k x^k \rangle = 0,$$

y si $n = m$, entonces $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \mu_0 > 0$. □

Una característica de las familias de polinomios ortogonales clásicas es que son autofunciones de un operador diferencial de tipo hipergeométrico.

Definición 2.6. *LLamamos **ecuación diferencial de tipo hipergeométrica** a toda ecuación diferencial de la forma*

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0 \tag{2.1}$$

donde σ y τ son polinomios de grado a lo sumo 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante.

Las soluciones de una ecuación diferencial de tipo hipergeométrica se denominan **funciones hipergeométricas**.

Un resultado importante es que las derivadas de cualquier orden de funciones hipergeométricas son nuevamente funciones hipergeométricas. Este resultado da lugar al desarrollo de la fórmula de Rodrigues, la cual permite encontrar explícitamente los polinomios de grado n que son solución de una ecuación diferencial de tipo hipergeométrica. Dicha fórmula fue establecida por Olinde Rodrigues en 1816 para un caso especial de polinomios ortogonales clásicos, los polinomios de Legendre.

Proposición 2.8. *Las derivadas de funciones hipergeométricas son funciones hipergeométricas.*

Demostración. Derivamos la ecuación (2.1) respecto de la variable x y reemplazamos $v_1(x) = y'(x)$. Tenemos

$$\sigma(x)v_1''(x) + \tau_1 v_1'(x) + \mu_1 v_1(x) = 0, \tag{2.2}$$

donde $\tau_1(x) = \tau(x) + \sigma'(x)$ y $\mu_1 = \lambda + \tau'(x)$. Como τ_1 es de grado 1 y μ_1 es constante, entonces (2.2) es de tipo hipergeométrica. Por lo tanto, v_1 es una función hipergeométrica.

Reiterando el procedimiento, obtenemos una función de tipo hipergeométrica para $y^{(n)}(x) = v_n(x)$:

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0 \quad (2.3)$$

donde $\tau_n(x) = \tau(x) + n\sigma'(x)$ es un polinomio de grado 1, y $\mu_n = \lambda + n\tau'(x) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x)$ es una constante.

Por lo tanto, las derivadas de $y(x)$ son funciones hipergeométricas. \square

Teorema 2.9. *Dada una ecuación diferencial de tipo hipergeométrica*

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

si $\lambda = \lambda_n = -n\tau'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x)$, para $n \in \mathbb{N}_0$, sus soluciones son polinomios y su expresión es

$$\frac{d^m}{dx^m} y_n(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \rho_n(x), \quad (2.4)$$

donde $A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k$, $A_0 = 1$, $A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$ y $B_n = \frac{1}{A_{nn}} \frac{d^n}{dx^n} y_n(x)$.

Además, si $m = 0$ obtenemos una representación explícita de los polinomios para toda $n \in \mathbb{N}_0$

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x) \rho(x)]. \quad (2.5)$$

A la ecuación (2.5) se la denomina **fórmula de Rodrigues**.

Demostración. Multiplicamos las ecuaciones (2.1) y (2.3) por las funciones apropiadas $\rho(x)$ y $\rho_n(x)$ respectivamente, para poder escribirlas de la forma autoadjunta

$$(\sigma(x)\rho(x)y'(x))' + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \quad (2.6)$$

y

$$(\sigma(x)\rho_n(x)v_n'(x))' + \mu_n\rho_n(x)v_n(x) = 0. \quad (2.7)$$

Aquí, $\rho(x)$ y $\rho_n(x)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x) \quad (2.8)$$

y

$$(\sigma(x)\rho_n(x))' = \tau_n(x)\rho_n(x). \quad (2.9)$$

Ahora, utilizando la forma explícita de $\tau_n(x)$, podemos establecer la relación entre $\rho_n(x)$ y $\rho(x)$. Tenemos

$$\frac{(\sigma(x)\rho_n(x))'}{\rho_n(x)} = \tau(x) + n\sigma'(x) = \frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\rho(x)} + n\sigma'(x),$$

de donde

$$\frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} = \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} + \frac{n\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Integrando ambos miembros obtenemos

$$\rho_n(x) = \sigma^n(x)\rho(x) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (2.10)$$

Como $\sigma(x)\rho_n(x) = \rho_{n+1}(x)$ y $v'_n(x) = v_{n+1}(x)$, podemos reescribir la ecuación (2.7) de la siguiente manera

$$\rho_n(x)v_n(x) = -\frac{1}{\mu_n}(\rho_{n+1}(x)v_{n+1}(x))'.$$

Por lo tanto, si $m < n$, obtenemos de manera sucesiva

$$\begin{aligned} \rho_m(x) &= -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1}(x)v_{m+1}(x))' \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) (\rho_{m+2}(x)v_{m+2}(x))'' \\ &= \dots \\ &= \frac{A_m}{A_n}(\rho_n(x)v_n(x))^{n-m} \end{aligned}$$

donde $A_n = (-1) \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k$ y $A_0 = 1$.

Si $\mu_n = 0$, es decir,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x),$$

entonces la ecuación (2.3) tiene como solución particular $v_n(x) = c$, con c constante. Como $v_n(x) = y^n(x)$, la ecuación (2.1) tiene como solución particular $y(x) = y_n(x)$ un polinomio de grado n .

Así, si $y(x) = y_n(x)$ es un polinomio de grado n , entonces

$$v_m(x) = y_n^{(m)}(x)$$

y

$$v_n(x) = y^{(n)}(x) = cte,$$

y obtenemos la siguiente forma explícita para dichos polinomios

$$\frac{d^m}{dx^m} y_n(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \rho_n(x),$$

donde $A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$ y $B_n = \frac{1}{A_{nn}} \frac{d^n}{dx^n} y_n(x)$.

En particular, cuando $m = 0$, tenemos la siguiente representación explícita para polinomios de tipo hipergeométrico

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\rho(x)].$$

□

A modo de resumen, decimos que una familia de polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es **clásica** si satisface:

1. Ser solución de una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico;

2. $\left\{\frac{d}{dx}p_n(x)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de polinomios ortogonales;
3. Los polinomios pueden expresarse en términos de una fórmula de Rodrigues

$$\frac{B_n}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\omega(x)]$$

donde B_n es una constante que depende de n y ω es la función de peso que hace ortogonal a la familia de polinomios;

4. Verifican una relación de recurrencia de tres términos

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Las únicas familias de polinomios ortogonales clásicos son las de Hermite, Laguerre y Jacobi. En la siguiente tabla resumimos sus características.

Nombre	Peso $\omega(x)$	Fórmula de Rodrigues	Intervalo
Hermite	e^{-x^2}	$\frac{(-1)^n}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} \omega(x)$	$(-\infty, +\infty)$
Laguerre	$e^{-x} x^\alpha$	$\frac{1}{n! \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [x^n \omega(x)]$	$[0, \infty)$
Jacobi	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$\frac{1}{2^n n! \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n \omega(x)]$	$[-1, 1]$

En la Sección 2.3 probaremos detalladamente las propiedades enunciadas para los polinomios de Hermite.

2.2. Polinomios ortogonales hipergeométricos

Las funciones hipergeométricas son de gran interés, no sólo porque los polinomios ortogonales se pueden representar en términos de ellas, sino por sus múltiples aplicaciones en física y matemática. En esta sección desarrollaremos los resultados más destacados sobre este tema. Para esto nos basamos en [1, 8, 37, 38].

2.2.1. Función hipergeométrica de Gauss

El término serie hipergeométrica fue utilizado por John Wallis en el libro "*Arithmetica infinitorum*", publicado en 1655, al estudiar la serie

$$1 + a + a(a+1) + a(a+1)(a+2) + \dots$$

Una generalización de esta serie fue estudiada por Leonard Euler en 1748 e introducida por Carl Friedrich Gauss en 1812 en su tesis "*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*" [34].

Definición 2.7. La función Gamma, $\Gamma(z)$, puede ser definida por alguna de las siguientes expresiones:

$$(1) \text{ Euler: } \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0;$$

(2) *Gauss*: $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$, si $z \neq 0, -1, -2, \dots$;

(3) *Weierstrass*: $\Gamma(z) = ze^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$, donde γ es el número de Euler,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right) \approx 0,57721\dots$$

Proposición 2.10. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Demostración. Integrando la Definición (1) por partes tenemos

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

□

Corolario 2.11. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$.

Observemos que, utilizando la definición de la función Gamma de Euler, podemos definirla en todo el plano complejo, excepto en \mathbb{Z}_0^- como

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z} & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge z \neq 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

Definición 2.8. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$. Definimos el **símbolo de Pochhammer** como

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

Además, si $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$, podemos definir el símbolo de Pochhammer como

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Notemos que $(1)_n = n!$.

Proposición 2.12. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, entonces

1. $(a)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n}$, $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
2. $(a)_{m+n} = (a)_m (a+m)_n$
3. $(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k}$, con $0 \leq k \leq n$

$$4. (-n)_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$

1. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, entonces

$$\begin{aligned} (a)_{-n} &= \frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a-n)}{(a-1)\Gamma(a-1)} = \frac{\Gamma(a-n)}{(a-1)(a-2)\Gamma(a-2)} = \dots \\ &= \frac{\Gamma(a-n)}{(a-1)(a-2)\dots(a-n)\Gamma(a-n)} = \frac{(-1)^n}{(1-a)(2-a)\dots(n-a)} \\ &= \frac{(-1)^n}{(1-a)(1-a+1)\dots(1-a+(n-1))} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n}. \end{aligned}$$

2.

$$(a)_m(a+m)_n = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma((a+m)+n)}{\Gamma(a+m)} = \frac{\Gamma(a+(m+n))}{\Gamma(a)} = (a)_{m+n}.$$

3. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$, por los puntos 1 y 2 tenemos

$$(a)_{n-k} = (a)_{n+(-k)} = (a)_n(a+n)_{-k} = (a)_n \frac{(-1)^k}{(1-(a+n))_k} = \frac{(a)_n(-1)^k}{(1-a-n)_k}.$$

4. Si en el ítem 3 hacemos $a = 1$, tenemos que $(n-k)! = \frac{(-1)^k n!}{(-n)_k}$. Por lo tanto, $(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$ siempre que $0 \leq k \leq n$.

Si $k > n$, entonces $k = n + m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq m \leq k - 1$. Luego,

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)\dots(-n+(k-m))\dots(-n+(k-1)) = 0.$$

□

Definición 2.9. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$. Definimos la **función hipergeométrica de Gauss** como

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Observemos que ${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(b, a, c; z)$. Además, por el punto 4 de la proposición anterior, si a (o b) $\in \mathbb{Z}^-$, la serie se reduce a un polinomio, es decir, si $a = -m$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$${}_2F_1(-m, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n m! (b)_n}{(m-n)! (c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposición 2.13. La función hipergeométrica de Gauss converge absolutamente si $|z| < 1$, diverge absolutamente si $|z| > 1$, y si $|z| = 1$ converge absolutamente si $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$ y diverge si $\operatorname{Re}(c - a - b) \leq 0$.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$, analizamos la convergencia absoluta por el criterio de D'alambert. Sea $d_n = \frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(c)_n n!}{(a)_n(b)_n z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} z \right| = |z|.$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$.

Supongamos ahora que $|z| = 1$. El criterio de Raabe establece que, dada una serie de términos positivos $\sum a_n$, si existe una serie B_n acotada tal que, para n suficientemente grande, se cumple

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{B_n}{n^2},$$

entonces la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$ [25].

Calculamos $\left| \frac{d_n}{d_{n+1}} \right|^2$ y obtenemos

$$\left| \frac{d_n}{d_{n+1}} \right|^2 = \frac{|c+n|^2 |n+1|^2}{|a+n|^2 |b+n|^2} |z|^2 = \frac{(c+n)(\bar{c}+n)(k+1)^2}{(a+n)(\bar{a}+n)(b+n)(\bar{b}+n)}. \quad (2.11)$$

Desarrollando los productos obtenemos el cociente de dos polinomios $P(n)$ y $Q(n)$:

$$P(n) = n^4 + 2n^3 (Re(c) + 1) + n^2 (|c|^2 + 4Re(c) + 1) + 2n (|c|^2 + Re(c)) + |c|^2$$

$$Q(n) = n^4 + 2n^3 (Re(a) + Re(b)) + n^2 (|a|^2 + |b|^2 + 4Re(a).Re(b)) + 2n (Re(a)|b|^2 + Re(b)|a|^2) + |a|^2 |b|^2$$

y cuyo resto es

$$R(n) = 2n^3 (Re(c - a - b) + 1) + n^2 (|c|^2 - |a|^2 - |b|^2 + 1 + 4Re(c) - 4Re(a)Re(b)) + 2n (|c|^2 + Re(c) - Re(a)|b|^2 - Re(b)|a|^2) + |c|^2 - |a|^2 |b|^2.$$

Es decir, $\left| \frac{d_n}{d_{n+1}} \right| = \sqrt{\frac{P(n)}{Q(n)}} = \sqrt{1 + \frac{R(n)}{Q(n)}}$. Aproximando la raíz por el desarrollo de Taylor obtenemos

$$\left| \frac{d_n}{d_{n+1}} \right| \approx 1 + \frac{R(n)}{2Q(n)}.$$

Ahora analizamos el cociente $\frac{R(n)}{Q(n)}$ y obtenemos

$$\frac{R(n)}{Q(n)} = \frac{2(Re(c) - Re(a) - Re(b)) + 1}{n} + \frac{S(n)}{n^2},$$

donde $S(n)$ es el resto de $\frac{R(n)}{Q(n)}$.

Entonces

$$\left| \frac{d_n}{d_{n+1}} \right| \approx 1 + \frac{Re(c - a - b) + 1}{n} + \frac{S(n)}{n^2}.$$

Como $|S(n)|$ está acotado para n suficientemente grande, por el criterio de Raabe, la serie converge si $Re(c - a - b) + 1 > 1$ y diverge si $Re(c - a - b) + 1 \leq 1$. \square

Teorema 2.14. La función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b, c; z)$ verifica la siguiente ecuación diferencial

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{df}{dz} - abf = 0 \quad (2.12)$$

si $|z| < 1$.

Demostración. Sea $f(z) = {}_2F_1(a, b, c; z)$. Como la serie converge absolutamente si $|z| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \frac{d^2 f(z)}{dz^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}. \end{aligned}$$

Reemplazamos las derivadas en (2.12) y tenemos

$$\begin{aligned} & z(1-z) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} + (c - (a+b+1)z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + ab \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-2)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+b+1)(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ab(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si analizamos los coeficientes asociados a las potencias de z obtenemos:

$$\text{Para } z^0: \frac{c(a)_1 (b)_1}{(c)_1} - \frac{ab(a)_0 (b)_0}{(c)_0} = \frac{cab}{c} - ab = 0;$$

$$\text{para } z^1: \frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} + \frac{(a)_2 (b)_2 c}{(c)_2} - \frac{(a+b+1)(a)_1 (b)_1}{(c)_1} - (ab) \frac{(a)_1 (b)_1}{(c)_1} =$$

$$\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{(c+1)} - \frac{a^2b + ab^2 + ab + a^2b^2}{c} = 0;$$

$$\text{para } z^n: \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(c)_{n+1} (n-1)!} - \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (n-2)!} + \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1} c}{(c)_{n+1} n!} - \frac{(a+b+1)(a)_n (b)_n}{(c)_n (n-1)!} - \frac{ab(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}.$$

Si resolvemos el coeficiente n -ésimo, para $n \geq 2$, obtenemos como resultado 0. Por lo tanto, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ es solución de la ecuación diferencial (2.12). □

Ahora presentaremos las denominadas relaciones de contigüidad de la función hipergeométrica. El nombre se debe a que se observa lo que sucede si uno de los parámetros de la función varía en ± 1 . La función hipergeométrica puede escribirse como combinación lineal de dos de sus funciones contiguas. Usaremos la notación $F = {}_2F_1(a, b, c; z)$, $F(a \pm 1) = {}_2F_1(a \pm 1, b, c; z)$, $F(b \pm 1) = {}_2F_1(a, b \pm 1, c; z)$, $F(c \pm 1) = {}_2F_1(a, b, c \pm 1; z)$.

Proposición 2.15. *Las relaciones de contigüidad de la función hipergeométrica son:*

- (1) $[c - 2a - (b - a)z]F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - a)F(a - 1) = 0$
- (2) $(b - a)F + aF(a + 1) - bF(b + 1) = 0$
- (3) $(c - a - b)F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - b)F(b - 1) = 0$
- (4) $c[a - (c - b)z]F - ac(1 - z)F(a + 1) - (c - a)(c - b)zF(c + 1) = 0$
- (5) $(c - a - 1)F + aF(a + 1) - (c - 1)F(c - 1) = 0$
- (6) $(c - a - b)F - (c - a)F(a - 1) + b(1 - z)F(b + 1) = 0$
- (7) $(b - a)(1 - z)F - (c - a)F(a - 1) + (c - b)F(b - 1) = 0$
- (8) $c(1 - z)F - cF(a - 1) + (c - b)zF(c + 1) = 0$
- (9) $[a - 1 - (c - b - 1)z]F + (c - a)F(a - 1) - (c - 1)(1 - z)F(c - 1) = 0$
- (10) $[c - 2b + (b - a)z]F + b(1 - z)F(b + 1) - (c - b)F(b - 1) = 0$
- (11) $c[b - (c - a)z]F - bc(1 - z)F(b + 1) + (c - a)(c - b)zF(c + 1) = 0$
- (12) $(c - b - 1)F + bF(b + 1) - (c - 1)F(c - 1) = 0$
- (13) $c(1 - z)F - cF(b - 1) + (c - a)F(c + 1) = 0$
- (14) $[b - 1 - (c - a - 1)z]F + (c - b)F(b - 1) - (c - 1)(1 - z)F(c - 1) = 0$
- (15) $c[c - 1 - (2c - a - b - 1)z]F + (c - a)(c - b)zF(c + 1) - c(c - 1)(1 - z)F(c - 1) = 0$

Demostración. Veremos la demostración de los ítems (1) y (3). El resto se demuestra de manera similar.

(1)

$$[c - 2a - (b - a)z]F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - a)F(a - 1) =$$

$$[c - 2a - (b - a)z] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} + a(1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + 1)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} - (c - a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - 1)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}.$$

Por las propiedades del símbolo de Pochhammer, tenemos las siguientes relaciones

$$(a - 1)_n = \frac{(a)_n (a - 1)}{(a + n - 1)}$$

$$(a + 1)_n = \frac{(a)_n (a + n)}{a}$$

Reemplazamos en la ecuación anterior

$$(c - 2a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} - (b - a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^{n+1}}{(c)_n n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + n)(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + n)(a)_n (b)_n z^{n+1}}{(c)_n n!} - (c - a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - 1)(a)_n (b)_n z^n}{(a + n - 1)(c)_n n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(c + n - 1)}{(a + n - 1)} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} - \sum_{n=0}^{\infty} n + b \frac{(a)_n (b)_n z^{n+1}}{(c)_n n!}.$$

Evaluamos los coeficientes de z^n . Para z^0 claramente el coeficiente es 0. Para z^n con $n > 0$:

$$\frac{n(c+n-1)(a)_n(b)_n}{(a+n-1)(c)_n n!} - \frac{(n-1+b)(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(n-1)!} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} \left[\frac{n(c+n-1)}{(a+n-1)} - \frac{n(c+n-1)}{(a+n-1)} \right] = 0$$

Por lo tanto, $[c - 2a - (b - a)z]F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - a)F(a - 1) = 0$.

(3)

$$(c - a - b)F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - b)F(b - 1) = \\ (c - a - b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} + a(1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} - (c - b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b-1)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

Por las propiedades del símbolo de Pochhammer enunciadas antes tenemos

$$(c - a - b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} + (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} - (c - b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n(b-1)}{(b+n-1)(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(c+n-1)}{(b+n-1)} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (a+n) \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^{n+1}.$$

Evaluamos los coeficientes de z^n . Para z^0 claramente el coeficiente es 0. Para z^n con $n > 0$:

$$\frac{n(c+n-1)}{(b+n-1)} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} - (a+n-1) \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(n-1)!} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} \left[\frac{n(c+n-1)}{(b+n-1)} - \frac{n(c+n-1)}{(b+n-1)} \right] = 0.$$

Por lo tanto, $(c - a - b)F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - b)F(b - 1) = 0$.

□

Proposición 2.16. *La función hipergeométrica tiene la siguiente relación con sus derivadas*

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m} {}_2F_1(a + m, b + m, c + m; z).$$

Demostración. Como la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente para $|z| < 1$, entonces es C^∞ en $|z| < 1$, y la derivada m -ésima se puede expresar como

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \right].$$

Probaremos por inducción sobre m :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{a \cdot b}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1) \dots (a+k) \cdot (b+1) \dots (b+k)}{(c+1) \dots (c+k)} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{a \cdot b}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k (b+1)_k}{(c+1)_k} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{(a)_1 (b)_1}{(c)_1} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1; z).
\end{aligned}$$

Supongamos que $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} {}_2F_1(a+m-1, b+m-1, c+m-1; z)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dz^m} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{d}{dz} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} {}_2F_1(a, b, c; z) \right] \\
&= \frac{d}{dz} \left[\frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+m-1)_n (b+m-1)_n}{(c+m-1)_n} \frac{z^n}{n!} \right] \\
&= \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+m-1)_n (b+m-1)_n}{(c+m-1)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+m-1)_{k+1} (b+m-1)_{k+1}}{(c+m-1)_{k+1}} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \frac{(a+m-1)(b+m-1)}{(c+m-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+m)_k (b+m)_k}{(c+m)_k} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} {}_2F_1(a+m, b+m, c+m; z).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.17. Si $Re(c) > Re(b) > 0$ y $|arg(1-z)| < \pi$, entonces

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt.$$

Llamaremos a esta integral representación integral de Euler para la función hipergeométrica. Observemos que, de la igualdad ${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(b, a, c; z)$, si $Re(c) > Re(a) > 0$ y $|arg(1-z)| < \pi$, entonces

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tz)^{-b} dt.$$

Demostración. Dado que la función $(1+z)^a$ tiene el desarrollo en serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$, siempre que $|z| < 1$, donde

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n (-a)_n}{n!}, \quad (2.14)$$

entonces, si $|tz| < 1$,

$$(1 - tz)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} (-tz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} t^n z^n.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt &= \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} t^n z^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \left(\int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n B(n+b, c-b) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)} z^n. \end{aligned}$$

Donde $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ es la función beta.

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \\ &= {}_2F_1(a, b, c; z). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.18. (Teorema de sumación de Gauss) Si $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$, entonces

$${}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

Definición 2.10. La ecuación diferencial de segundo orden

$$z(1-z) \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw(z)}{dz} - abw(z) = 0 \quad (2.15)$$

con $a, b, c \in \mathbb{C}$, es llamada **ecuación diferencial hipergeométrica de Euler**. Equivalentemente, la podemos escribir como

$$\{\delta(\delta+c-1) - z(\delta+a)(\delta+b)\} w = 0. \quad (2.16)$$

con $\delta = z \left(\frac{d}{dz} \right)$.

Proposición 2.19. La ecuación diferencial hipergeométrica tiene tres singularidades regulares en $0, 1$ e ∞ .

Demostración. Consideremos las funciones $P(z) = z(1 - z)$, $Q(z) = c - (a + b + 1)z$ y $R(z) = -ab$. Dado que la función $P(z)$ se anula en 0 y 1, veamos si son puntos singulares regulares.

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{Q(z)}{P(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z [c - (a + b + 1)z]}{z(1 - z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{c - (a + b + 1)z}{1 - z} = c,$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{R(z)}{P(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2(-ab)}{z(1 - z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-zab}{1 - z} = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{Q(z)}{P(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1) [c - (a + b + 1)z]}{z(1 - z)} = \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{c - (a + b + 1)z}{z} = a + b + 1 - c,$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 \frac{R(z)}{P(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)^2(-ab)}{z(1 - z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(z - 1)ab}{-z} = 0.$$

Así, 0 y 1 son puntos singulares regulares. Analicemos ahora cuando $z \rightarrow \infty$, para ello realizamos el cambio de variable $z = \frac{1}{\zeta}$ y analizamos el límite $\zeta \rightarrow 0$. La ecuación diferencial hipergeométrica nos queda

$$\zeta^2(\zeta - 1) \frac{d^2w}{d\zeta^2} + [2\zeta(\zeta - 1) - \zeta^2c + (a + b + 1)\zeta] \frac{dw}{d\zeta} - abw = 0.$$

Así, considerando las funciones $\tilde{P}(\zeta) = \zeta^2(\zeta - 1)$, $\tilde{Q}(\zeta) = 2\zeta(\zeta - 1) - \zeta^2c + (a + b + 1)\zeta$ y $\tilde{R}(\zeta) = -ab$, veamos si ζ es regular.

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \frac{\tilde{Q}(\zeta)}{\tilde{P}(\zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{2(\zeta - 1) - \zeta c + (a + b + 1)}{(\zeta - 1)} = 1 - a - b,$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta^2 \frac{\tilde{R}(\zeta)}{\tilde{P}(\zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{-ab}{(\zeta - 1)} = ab.$$

Por lo tanto, $\zeta = 0$ es un punto singular regular. □

2.2.2. Función hipergeométrica confluyente

Un caso especial de la función hipergeométrica de Gauss se da cuando calculamos el límite $\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right)$. En este caso lo que sucede es la confluencia de dos de las singularidades de la función hipergeométrica, obteniendo así un punto singular regular y otro irregular.

Definición 2.11. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, definimos la **función hipergeométrica confluyente** como

$${}_1F_1(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}.$$

Veamos cómo se llega a la función ${}_1F_1$ a partir de ${}_2F_1$. Evaluamos la función en $z = \frac{w}{b}$,

$${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{w}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{w^n}{n! b^n}$$

y analizamos los primeros coeficientes

$$\begin{aligned}\frac{(a)_0(b)_0}{(c)_0 b^0} &= 1 \\ \frac{(a)_1(b)_1}{(c)_1 b} &= \frac{a}{c} \\ \frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2 b^2} &= \frac{(a)_2}{(c)_2} \frac{b(b+1)}{b^2} = \frac{(a)_2}{(c)_2} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \\ \frac{(a)_3(b)_3}{(c)_3 b^3} &= \frac{(a)_3}{(c)_3} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{2}{b}\right).\end{aligned}$$

Generalizando,

$$\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n b^n} = \frac{(a)_n}{(c)_n} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{2}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{b}\right).$$

Si hacemos tender b al infinito, obtenemos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b, c; \frac{w}{b}\right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n w^n}{(c)_n n!} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n w^n}{(c)_n n!} = {}_1F_1(a, c; w).$$

Como la función ${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{w}{b}\right)$ tienen singularidades en $w = 0$, $w = b$ y $w = \infty$, al hacer tender b al infinito, las singularidades confluyen y ${}_1F_1(a, c; w)$ tendrá singularidades en $w = 0$ y $w = \infty$.

Proposición 2.20. *La función hipergeométrica confluyente converge absolutamente en todo el plano complejo.*

Demostración. Analizamos por el criterio de la razón. Sea $d_n = \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_{n+1} (c)_n z^{n+1} (n+1)!}{(a)_n (c)_{n+1} z^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+n)z}{(c+n)(n+1)} \right| = 0$$

Por lo tanto, la función converge para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Proposición 2.21. *La función hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ verifica la siguiente ecuación diferencial*

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (c - z) \frac{df}{dz} - af = 0. \quad (2.17)$$

*A esta ecuación la llamamos **ecuación diferencial hipergeométrica confluyente**.*

Demostración. Partiendo de la ecuación diferencial hipergeométrica dada en la Definición 2.10, si reemplazamos $z = \frac{w}{b}$ entonces obtenemos

$$\frac{w}{b} \left(1 - \frac{w}{b}\right) b^2 \frac{d^2 f}{dw^2} + \left[c - (a + b + 1) \frac{w}{b}\right] b \frac{df}{dw} - abf = 0.$$

Sacamos factor común b ,

$$w \left(1 - \frac{w}{b}\right) \frac{d^2 f}{dw^2} + \left[c - \left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{1}{b}\right) w\right] \frac{df}{dw} - af = 0.$$

Haciendo tender b al infinito, nos queda la ecuación (2.17). □

Proposición 2.22. *La función hipergeométrica confluyente tiene la siguiente relación con sus derivadas*

$$\frac{d^m}{dx^m} {}_1F_1(a, c; z) = \frac{(a)_m}{(c)_m} {}_1F_1(a + m, c + m; z).$$

Demostración. Como la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}$ es analítica en todo el plano complejo, entonces es \mathcal{C}^∞ y

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_1F_1(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!} \right].$$

Probaremos por inducción sobre m :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_1F_1(a, c; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left[\frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n z^{n-1}}{(c)_n (n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1} z^k}{(c)_{k+1} k!} \\ &= \frac{a}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k z^k}{(c+1)_k k!} \\ &= \frac{(a)_1}{(c)_1} {}_1F_1(a+1, c+1; z). \end{aligned}$$

Supongamos que $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} {}_1F_1(a, c; z) = \frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} {}_1F_1(a + m - 1, c + m - 1; z)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} {}_1F_1(a, c; z) &= \frac{d}{dz} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} {}_1F_1(a, c; z) \right] \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+m-1)_n z^n}{(c+m-1)_n n!} \right] \\ &= \frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+m-1)_n z^{n-1}}{(c+m-1)_n (n-1)!} \\ &= \frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \frac{(a+m-1)}{(c+m-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+m)_k z^k}{(c+m)_k k!} \\ &= \frac{(a)_m}{(c)_m} {}_1F_1(a + m, c + m; z). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.23. *Las relaciones de contigüidad de la función hipergeométrica confluyente son:*

- (1) $(c-a)F(a-1) + (2a-c+z)F - aF(a+1) = 0$
- (2) $c(c-1)F(c-1) - c(c-1+z)F + (c-a)zF(c+1) = 0$
- (3) $(a-c+1)F - aF(a+1) + (c-1)F(c-1) = 0$
- (4) $cF - cF(a-1) - zF(c+1) = 0$

$$(5) \quad c(a+z)F - (c-a)zF(c+1) - acF(a+1) = 0$$

$$(6) \quad (a-1+z)F + (c-a)F(a-1) - (c-1)F(c-1) = 0,$$

donde $F = {}_1F_1(a, c; z)$, $F(a \pm 1) = {}_1F_1(a \pm 1, c; z)$ y $F(c \pm 1) = {}_1F_1(a, c \pm 1; z)$.

Proposición 2.24. Si $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$ y $|\arg(1-z)| < \pi$, entonces la representación integral de Euler de la función hipergeométrica confluyente es

$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt.$$

Demostración. Por lo visto en la Proposición 2.17 y evaluando en $\frac{z}{b}$,

$${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \left(1 - t\frac{z}{b}\right)^{-b} dt,$$

Por otro lado, $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - t\frac{z}{b}\right)^{-b} = e^{zt}$. Como el integrando es medible y está acotado, entonces

$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt.$$

□

2.2.3. Problema de Bochner

En 1929, Salomon Bochner [2] clasificó las familias de polinomios $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ que son solución de una ecuación diferencial de segundo orden

$$r_2(x)p_n''(x) + r_1(x)p_n'(x) + r_0(x)p_n(x) + \lambda p_n(x) = 0, \quad (2.18)$$

donde $r_i(x)$ son funciones polinómicas, $i = 0, 1, 2$, y λ es una constante. El resultado obtenido es que sólo las familias de Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel tienen esta propiedad.

A continuación desarrollaremos la idea en la que se basa la resolución del problema de Bochner. El desarrollo completo puede verse en [2].

Proposición 2.25. Supongamos que existe una familia de polinomios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ solución de la ecuación (2.18) y tales que el grado de $p_k(x)$ es k . Entonces, el grado de $r_i(x)$ es a lo sumo i , con $i = 0, 1, 2$.

Demostración. Partimos de la ecuación diferencial de segundo orden (2.18), donde $r_0(x), r_1(x), r_2(x) \in \mathbb{C}[x]$, $x \in (a, b)$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Supongamos que existen λ_n complejos, con $n \in \mathbb{N}_0$, y $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n y que está definido en (a, b) , tales que

$$r_2(x)p_n''(x) + r_1(x)p_n'(x) + r_0(x)p_n(x) + \lambda_n p_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.19)$$

Si en la ecuación (2.19) hacemos $n = 0$, como $p_0(x) = c$ con c constante, tenemos

$$r_0(x)p_0(x) + \lambda_0 p_0(x) = 0. \quad (2.20)$$

Basta tomar $r_0(x) = -\lambda_0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r_0(x) = 0$. Entonces reemplazando en (2.18) tenemos

$$r_2(x)y'' + r_1(x)y' + \lambda y = 0 \quad (2.21)$$

Ahora, si $n = 1$, como $p_1(x) = ax + b$ con $a \neq 0$, si reemplazamos en (2.21) tenemos

$$\begin{aligned} r_1(x)p_1'(x) + \lambda_1 p_1(x) &= 0 \\ r_1(x)a + \lambda_1(ax + b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Entonces $r_1(x) = -\frac{1}{a}\lambda_1(ax + b)$. Por lo tanto, $r_1(x)$ es un polinomio de grado 1, y lo escribimos como $r_1(x) = \delta + \epsilon x$.

Ahora tomamos $n = 2$. Entonces $p_2(x) = cx^2 + dx + e$ con $c \neq 0$. Si reemplazamos en (2.21), obtenemos

$$\begin{aligned} r_2(x)p_2''(x) + r_1(x)p_2'(x) + \lambda_2 p_2(x) &= 0 \\ r_2(x)2c + r_1(x)(2cx + d) + \lambda_2(cx^2 + dx + e) &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por lo tanto, $r_2(x) = -\frac{1}{2c} [p_1(x)(2cx + d) + \lambda_2(cx^2 + dx + e)]$, es decir, $r_2(x)$ es un polinomio de grado 2 y lo escribimos como $r_2(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. \square

Reescribimos la ecuación (2.18) como

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)y'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0 \quad (2.24)$$

A continuación, procedemos analizando el polinomio $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, considerando las diferentes posibilidades sobre el grado de este polinomio, es decir, que sea de grado 0, 1 o 2. Obtenemos, salvo transformación lineal, los siguientes 5 casos.

1. $(\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0,$
2. $y'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0,$
3. $xy'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0,$
4. $x^2y'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0,$
5. $x(1 - x)y'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0.$

En el primer caso, si hacemos el reemplazo $\delta = 0, \epsilon = 1$, obtenemos que la familia de polinomios $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es solución de la ecuación diferencial para $\lambda_n = -n$.

Los casos 2 a 5 tienen como solución los polinomios antes mencionados. En la siguiente tabla resumimos los valores de $r_{1,2}(x)$ y λ_n para cada familia de polinomios.

$r_2(x)$	$r_1(x)$	λ_n	Nombre
1	$-2x$	$-2n$	Hermite $H_n(x)$
x	$1 + \alpha - x$	$-n$	Laguerre $L_n^\alpha(x)$
x^2	ax	$n(n + a - 1)$	Bessel
$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	Jacobi $P_n^\alpha(x)$

2.3. Polinomios de Hermite

La familia de polinomios de Hermite es una familia de polinomios ortogonales clásica que encuentra su origen en el problema físico del oscilador armónico cuántico. También es utilizada en probabilidad, en la serie de Edgeworth. Los polinomios de Hermite aparecieron por primera vez en 1810 en el libro *"Tratado de mecánica celeste"*, de Laplace. Luego fueron estudiados por Chebyshev pero pasaron desapercibidos. Finalmente, fue Charles Hermite quien los nombró y estudió en detalle en 1864 en su libro *"Sur un nouveau développement en série de fonctions"* (Sobre un nuevo desarrollo de funciones en serie).

A continuación desarrollaremos las propiedades que satisfacen las familias de polinomios ortogonales clásicos demostradas en la Sección 2.1.1 para los polinomios de Hermite, partiendo de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica que los caracteriza.

Cabe resaltar que existen dos representaciones de los polinomios de Hermite, según diferentes autores. Una de ellas es la forma física ($H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2}$) utilizada, como ya mencionamos, en el estudio del oscilador armónico cuántico, y es la que utilizaremos en este trabajo. La segunda es la forma probabilística ($He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2}$). Ambas expresiones están relacionadas de la siguiente forma:

$$H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} He_n(\sqrt{2}x).$$

Por lo tanto, las propiedades que desarrollamos a continuación se cumplen en ambas definiciones, con sus respectivos cambios.

Definición 2.12. Una familia de polinomios ortogonales $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es de **Hermite** si satisface la ecuación diferencial hipergeométrica

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0, \quad (2.25)$$

con $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.26. La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right). \quad (2.26)$$

Demostración. Por definición, los polinomios de Hermite, $H_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}_0$, son funciones de tipo hipergeométricas donde $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$ y $\lambda_n = 2n$ en la ecuación diferencial hipergeométrica (2.1). Por la Proposición 2.8, su derivada n -ésima también lo es y satisface la ecuación diferencial

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0,$$

donde $\tau_n(x) = -2x$ y $\mu_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}_0$.

Por lo tanto, los polinomios de Hermite pueden escribirse según la fórmula de Rodrigues como

$$H_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\rho(x)],$$

donde $\rho(x)$ cumple las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} (\sigma(x)\rho_n(x))' &= \tau_n(x)\rho_n(x) \\ (\rho_n(x))' &= -2x\rho_n(x). \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial, tenemos que $\rho_n(x) = e^{-x^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Tomando $B_n = (-1)^n$, obtenemos que la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite está dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (2.27)$$

□

Observación 2.3. El término $B_n = (-1)^n$ está dado por motivos de estandarización relacionados al oscilador armónico cuántico.

De la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite, se deduce que $H_n(x)$ es un polinomio de grado n . Los primeros polinomios son:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

Proposición 2.27. La familia de polinomios de Hermite, $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, verifica la siguiente relación con su derivada, para todo $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Demostración. En el Teorema 2.9 vimos que $\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) = (-1)^n A_{mn} e^{x^2} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2}$. Si reemplazamos $m = 1$, obtenemos

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = (-1)^n A_{1n} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} = (-A_{1n})(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} = (-A_{1n})H_{n-1}(x),$$

donde $A_{1n} = A_1(\lambda)|_{\lambda_n} = -\lambda_n = -2n$.

Por lo tanto, $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. □

Proposición 2.28. La familia de polinomios de Hermite, $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, satisface la siguiente relación de recurrencia, para todo $n \in \mathbb{N}_0$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Demostración. Por la fórmula de Rodrigues para $H_{n+1}(x)$ tenemos

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (-2xe^{-x^2})$$

y por la regla de Leibniz para la derivada n -ésima del producto, tenemos

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2x)^{(k)} (e^{-x^2})^{(n-k)} \right).$$

Notemos que, para todo $k \geq 2$, $(-2x)^{(k)} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \left(-2x (e^{-x^2})^{(n)} - 2n (e^{-x^2})^{(n-1)} \right) \\ &= (-1)^{n+1} (-2x) e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} + (-1)^{n+1} (-2n) e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n-1)} \\ &= 2x \left((-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} \right) - 2n \left((-1)^{n-1} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n-1)} \right) \\ &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.29. La función generatriz de los polinomios de Hermite es

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \frac{x^n}{n!}.$$

Demostración. Consideremos la función $G(x, t) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = e^{2tx-x^2}$. Si escribimos esta función en su desarrollo en serie de Taylor, obtenemos

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} \frac{x^n}{n!}.$$

Además, dado que $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial(t-x)}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} &= (-1)^n \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial (t-x)^n} \Big|_{x=0} = (-1)^n e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial (t-x)^n} e^{-(t-x)^2} \Big|_{x=0} \\ &= (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} = H_n(t). \end{aligned}$$

Así, $G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \frac{x^n}{n!}$. La función generatriz de los polinomios de Hermite es $G(x, t) = e^{2xt-x^2}$. □

Veamos algunas propiedades básicas que se obtienen a partir de la función generatriz. En primer lugar, observemos que, si desarrollamos e^{2xt-x^2} en serie de potencias de x , obtenemos

$$G(x, t) = e^{2xt-x^2} = e^{2xt}e^{-x^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2xt)^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{r,k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2t)^r}{r!k!} x^{r+2k}.$$

Si hacemos $n = 2k + r$, entonces $r = n - 2k$, por lo que $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y nos queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2t)^{n-2k}}{(n-2k)!k!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \frac{x^n}{n!}.$$

De aquí se deduce la forma explícita de los polinomios de Hermite,

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2t)^{n-2k} n!}{(n-2k)!k!}.$$

De esta expresión podemos deducir que $H_n(x)$ es par si n es par, e impar si n es impar. Además, $H_{2n+1}(0) = 0$ y $H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n 2n!}{n!}$.

Es sabido de la teoría clásica que en la fórmula de Rodrigues encontramos la función de peso respecto a la cual son ortogonales las familias de polinomios, y está dada por la función $\rho(x)$. Verificaremos, entonces, que la familia de polinomios de Hermite es ortogonal respecto a e^{-x^2} .

Proposición 2.30. *La familia de polinomios de Hermite $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortogonal respecto a la función de peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Para verificar que $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortogonal respecto al peso $\omega(x) = e^{-x^2}$, consideremos el producto interno

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx.$$

Observemos que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-x^2} x^k \Big|_{-M}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N^2} N^k - \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-M^2} (-M)^k = 0 - 0 = 0.$$

Sea $n \neq m$, las funciones $H_n(x)$ y $H_m(x)$ verifican las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\left(e^{-x^2} H_n'(x) \right)' + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0, \tag{2.28}$$

$$\left(e^{-x^2} H_m'(x) \right)' + 2me^{-x^2} H_m(x) = 0. \tag{2.29}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.28) por $H_m(x)$ y la ecuación (2.29) por $H_n(x)$, y luego restamos ambas ecuaciones, obtenemos

$$H_m(x) \left(e^{-x^2} H_n'(x) \right)' - H_n(x) \left(e^{-x^2} H_m'(x) \right)' + H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} (2n - 2m) = 0$$

por lo tanto,

$$H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = - \frac{H_m(x) \left(e^{-x^2} H_n'(x) \right)' - H_n(x) \left(e^{-x^2} H_m'(x) \right)'}{2n - 2m}.$$

Además, observemos que

$$H_m(x) \left(e^{-x^2} H_n'(x) \right)' - H_n(x) \left(e^{-x^2} H_m'(x) \right)' = \left(e^{-x^2} (H_m(x) H_n'(x) - H_n(x) H_m'(x)) \right)'$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{-x^2} (H_m(x) H_n'(x) - H_n(x) H_m'(x))}{2m - 2n} \right) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-x^2} (H_m(x) H_n'(x) - H_n(x) H_m'(x))}{2m - 2n} \right|_{-M}^N = 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por la observación inicial, ya que $H_m(x) H_n'(x) - H_n(x) H_m'(x)$ es un polinomio.

Si $n = m$, por la fórmula de Rodrigues, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \left((-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx.$$

Si integramos por partes, tomando

$$\begin{aligned} u &= H_n(x) \\ dv &= \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} (-1)^n \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} H_n(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \Big|_{-M}^N - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} 2n H_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \\ = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(x)^2 e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(x)^2 e^{-x^2} dx$. Si reiteramos el proceso n veces obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

□

Capítulo 3

Polinomios ortogonales matriciales

3.1. Definiciones y teoría general de polinomios ortogonales matriciales

Los polinomios ortogonales matriciales fueron introducidos por M. Krein en 1949 [31], en los siguientes años se comenzó a estudiar si estos polinomios verificaban las mismas propiedades que los polinomios escalares. En 1997, A. Durán planteó un trabajo similar al de Bochner para el caso matricial [16], buscando pesos matriciales tales que las familias de polinomios ortogonales asociadas sean autofunciones de un operador diferencial matricial de segundo orden. Desde entonces se busca replicar la clasificación de Bochner y caracterizar a todas las familias de polinomios ortogonales matriciales. Cantero, Moral y Velázquez [7] estudiaron cuándo las derivadas de una familia de polinomios ortogonales matriciales también es ortogonal respecto a una función de peso. Durán, Grünbaum y colaboradores estudiaron las fórmulas de Rodrigues de diferentes familias de polinomios matriciales [18, 22], y que sean autofunciones de un operador diferencial matricial de segundo orden [20, 21, 23, 19].

En esta sección ampliamos los conceptos vistos anteriormente al caso matricial. Los resultados que desarrollaremos se basan en [6, 16, 20].

Definición 3.1. Denotamos $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$ al espacio vectorial complejo de todos los polinomios de variable real que tienen como coeficientes matrices cuadradas de orden N , es decir,

$$\mathbb{C}^{N \times N}[x] = \{P(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_{m-1}x^{m-1} + A_mx^m : m \in \mathbb{N}_0, A_i \in \mathbb{C}^{N \times N}, i \in \{1, \dots, m\}\}$$

Si la matriz A_m es no nula decimos que el grado de $P(x)$ es m , lo notamos como $\text{gr}(P) = m$. Diremos que el polinomio es mónico si $A_m = I_N$. En adelante notamos como θ a la matriz nula e I a la matriz identidad, cuyo orden debe interpretarse según el contexto.

Recordemos algunas definiciones de álgebra lineal que serán de utilidad más adelante.

i) Una matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ se denomina **hermítica** si $A = A^*$, donde A^* es la matriz transpuesta

conjugada, a la que denominamos matriz **adjunta** de A .

ii) Una matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ se dice **definida positiva** si es hermítica y sus autovalores son reales positivos.

iii) Dado un polinomio $P(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$, notaremos $P^*(x)$ al polinomio

$$P^*(x) = A_0^* + A_1^*x + \dots + A_m^*x^m$$

si $x \in \mathbb{R}$, y

$$P^*(x) = A_0^* + A_1^*\bar{x} + \dots + A_m^*\bar{x}^m$$

si $x \in \mathbb{C}$.

Observación 3.1. El conjunto de polinomios matriciales $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$ es un módulo a derecha e izquierda sobre el anillo $\mathbb{C}^{N \times N}$.

Definición 3.2. Una función $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ se dice de **peso matricial** si cumple las siguientes condiciones

1. $W(x)$ es integrable y definida positiva en casi todo punto;
2. la matriz $W(x)$ es no degenerada, es decir, para toda matriz polinomial $P \neq \theta$

$$\int_{\mathbb{R}} P(x)^*W(x)P(x)dx \neq \theta;$$

3. los momentos $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n W(x)dx$ existen y son finitos para todo $n \geq 0$.

Definición 3.3. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : \mathbb{C}^{N \times N}[x] \times \mathbb{C}^{N \times N}[x] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ se dice **producto interno matricial** respecto del peso matricial W si para todos $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$, $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ verifica:

1. $\langle P(x), P(x) \rangle_W$ es definida positiva y $\langle P(x), P(x) \rangle_W \equiv \theta$ si y sólo si $P(x) \equiv \theta$;
2. $\langle P(x), Q(x) \rangle_W = \langle Q(x), P(x) \rangle_W^*$;
3. $\langle P(x)A, Q(x)B \rangle_W = A^* \langle P(x), Q(x) \rangle_W B$;
4. $\langle P(x) + R(x), Q(x) \rangle_W = \langle P(x), Q(x) \rangle_W + \langle R(x), Q(x) \rangle_W$.

Proposición 3.1. Sea W un peso matricial, entonces

$$\langle P(x), Q(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(x)^*W(x)Q(x)dx$$

es un producto interno matricial.

Demostración. Sean $P, R, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$, sean $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

1. Dado que $W(x)$ es un peso matricial, es no degenerado. Por lo tanto $\langle P(x), P(x) \rangle_W \equiv \theta$ si y sólo si $P(x) \equiv \theta$.

Supongamos que $P(x) \neq \theta$, sea $z \in \mathbb{C}^N$. Entonces

$$z^* \langle P(x), P(x) \rangle_W z = \int_{\mathbb{R}} z^* P(x)^* W(x) P(x) z dx = \int_{\mathbb{R}} (P(x)z)^* W(x) P(x)z dx.$$

Como $P(x)z \in \mathbb{C}^N$ y $W(x)$ es definida positiva, entonces $(P(x)z)^* W(x) P(x)z > 0$. Por lo tanto, $z^* \langle P(x), P(x) \rangle_W z > 0$.

2. Dado que $W = W^*$, se cumple que

$$\begin{aligned} \langle P(x), Q(x) \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} P(x)^* W(x) Q(x) dx = \int_{\mathbb{R}} P(x)^* W(x)^* (Q(x))^* dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} [Q(x)^* W(x) P(x) dx]^* = \langle Q(x), P(x) \rangle_W^*. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \langle P(x)A, Q(x)B \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} [P(x)A]^* W(x) Q(x)B dx = \int_{\mathbb{R}} A^* P(x)^* W(x) Q(x)B dx \\ &= A^* \left(\int_{\mathbb{R}} P(x)^* W(x) Q(x) dx \right) B = A^* \langle P(x), Q(x) \rangle_W B. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \langle P(x) + R(x), Q(x) \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} [P(x) + R(x)]^* W(x) Q(x) dx = \int_{\mathbb{R}} [P(x)^* + R(x)^*] W(x) Q(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(x)^* W(x) Q(x) dx + \int_{\mathbb{R}} R(x)^* W(x) Q(x) dx = \langle P(x), Q(x) \rangle_W + \langle R(x), Q(x) \rangle_W. \end{aligned}$$

Así, $\langle P(x), Q(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(x)^* W(x) Q(x) dx$ es un producto interno matricial.

□

Definición 3.4. Diremos *sucesión de polinomios matriciales* (o familia de polinomios matriciales) $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ si para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple que $P_n(x)$ es un polinomio matricial de grado n y el coeficiente principal es inversible.

Definición 3.5. Dado un peso matricial W y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, decimos que una sucesión de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es *ortogonal* respecto a W si

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n^*(x) W(x) P_m(x) dx = S_n \delta_{nm}$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker y $S_n = \|P_n(x)\|^2 = \langle P_n(x), P_n(x) \rangle_W$ es la norma de P_n . Además, si $S_n = I$, los polinomios se dicen *ortonormales*.

Observación 3.2. Notemos que, $\forall P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$, se cumple $\langle P(x), Q(x) \rangle_W < \infty$. Esto es consecuencia de que la función de peso W tiene momentos finitos. Es decir, si $P(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$, y $Q(x) = \sum_{j=0}^m B_j x^j$, entonces

$$\langle P(x), Q(x) \rangle_W = \left\langle \sum_{k=0}^n A_k x^k, \sum_{j=0}^m B_j x^j \right\rangle_W = \sum_{k,j=0}^{n,m} A_k^* \left(\int_{\mathbb{R}} x^{k+j} W(x) dx \right) B_j < \infty$$

Proposición 3.2. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales. Todo polinomio $Q(x) \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ de grado n se escribe de única manera como

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x)C_k$$

con $C_k \in \mathbb{C}^{N \times N}$ para $0 \leq k \leq n$. Es decir, toda sucesión de polinomios matriciales es una base de $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$ como $\mathbb{C}^{N \times N}$ -módulo a derecha.

Demostración. Sea $Q(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$. Queremos encontrar los coeficientes matriciales C_j tales que

$$\sum_{k=0}^n A_k x^k = Q(x) = \sum_{j=0}^n P_j(x)C_j. \quad (3.1)$$

Notemos que $P_j(x) = \sum_{i=0}^j T_i^j x^i$, si sustituimos esta expresión en (3.1) e igualamos los coeficientes de x^k en ambos miembros de la ecuación resultante, tenemos

$$\begin{cases} A_0 = T_0^0 C_0 + T_0^1 C_1 + \dots + T_0^n C_n \\ A_1 = T_1^1 C_1 + \dots + T_1^n C_n \\ \vdots \\ A_n = T_n^n C_n \end{cases} \quad (3.2)$$

De que los coeficientes T_i^j son inversibles para $0 \leq i \leq j$, $0 \leq j \leq n$, y dado que obtenemos un sistema de ecuaciones triangular, podemos concluir que el sistema tiene una única solución para los coeficientes C_k . □

Proposición 3.3. Sea V_n el espacio de todos los polinomios en $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$ de grado menor o igual a n , es decir, $V_n = \{P \in \mathbb{C}^{N \times N}[x] : gr(P) \leq n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Se cumple que

1. $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp$, donde $V_{n-1}^\perp = \{Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[x] : \langle P, Q \rangle_W = \theta, \forall P \in V_{n-1}\}$;
2. $dim(V_{n-1}^\perp) = N^2$;
3. V_{n-1}^\perp contiene un único polinomio mónico de grado n .

Demostración. Probaremos por inducción en n . Por definición, $V_{-1} = \theta$.

Si $n = 0$, entonces $V_0 = \{P \in \mathbb{C}^{N \times N}[x] : gr(P) = 0\} = \{A \in \mathbb{C}^{N \times N}\}$. Por otro lado, $\theta^\perp = \{P \in V_0 : \langle P, \theta \rangle = \theta\}$. Por lo tanto, $V_0 = \theta^\perp$. Además, $I \in V_0$ y $dim(V_0) = N^2$.

Supongamos ahora que las condiciones 1, 2, 3 se cumplen para todo $0 \leq k \leq n-1$. Sea P_n un polinomio mónico de grado n en V_{n-1}^\perp . Entonces podemos escribirlo como

$$P_n(x) = x^n I + x^{n-1} A_{n-1} + x^{n-2} A_{n-2} + \dots + A_0$$

Luego, de que $P_n(x) \in V_{n-1}^\perp$ y por la hipótesis inductiva tenemos que, para todo $0 \leq j \leq n-1$,

$$\theta = \langle P_n(x), x^j I \rangle = \langle x^n I, x^j I \rangle + \langle x^j A_j, x^j I \rangle = \langle x^n I, x^j I \rangle + A_j^* \langle x^j I, x^j I \rangle.$$

Como $\langle x^j I, x^j I \rangle$ es inversible, entonces A_j queda completamente determinada. Así, P_n es el único polinomio mónico en V_{n-1}^\perp .

Sea $H \in V_n$. Si $H \in V_{n-1}$ es trivial que $H \in V_{n-1} + V_{n-1}^\perp$. Si $H \notin V_{n-1}$, entonces $gr(H) = n$, por lo tanto, existe $Q \in V_{n-1}$ tal que $H = x^n A_n + Q$ para alguna matriz A_n . Observemos que $H - A_n P_n \in V_{n-1}$, por lo tanto $H \in V_{n-1} + V_{n-1}^\perp$.

Para ver que la suma es directa, tomamos $P \in V_{n-1} \cap V_{n-1}^\perp$. Por lo tanto, $\langle P, P \rangle = \theta$, y de que W es no degenerado tenemos que $P = \theta$. Así, $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp$.

Notemos que

$$V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp = V_{n-2} \oplus V_{n-2}^\perp \oplus V_{n-1}^\perp = \dots = V_0 \oplus V_0^\perp \oplus \dots \oplus V_{n-1}^\perp.$$

Como $dim(V_n) = (n+1)N^2$ y por la hipótesis inductiva, tenemos que

$$dim(V_{n-1}^\perp) = (n+1)N^2 - nN^2 = N^2.$$

□

Corolario 3.4. *Dado un peso W , existe una única sucesión $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociados a él.*

Observación 3.3. *Toda sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a una matriz de peso W es de la forma $R_n(x) = A_n P_n(x)$, para ciertas matrices A_n , donde P_n son polinomios matriciales ortogonales mónicos respecto a W .*

Observación 3.4. *No existe una única sucesión de polinomios ortonormales con respecto a un peso W . Si $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales matriciales, y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ es una sucesión de matrices unitarias, entonces podemos construir otra sucesión de polinomios matriciales ortonormales respecto a W definiendo $Q_n(x) = P_n U_n$.*

A continuación daremos algunas definiciones de reducibilidad. Si bien no profundizaremos sobre este tema en este trabajo, pueden encontrarse criterios desarrollados en el paper de Tirao-Zurrian [40].

Definición 3.6. *Decimos que dos matrices de peso W_1 y W_2 son **similares** si existe una matriz no singular T tal que $W_1 = T W_2 T^*$.*

Definición 3.7. *Decimos que una matriz de peso W **reduce** a un tamaño menor si existe una matriz T no singular para la cual*

$$W(t) = T \begin{pmatrix} Z_1(t) & 0 \\ 0 & Z_2(t) \end{pmatrix} T^*$$

donde Z_1 y Z_2 son matrices de peso de orden menor.

En caso contrario decimos que la matriz es irreducible.

Observemos que la sucesión de polinomios matriciales ortonormales respecto a W , $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, es

$$P_n(t) = \begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & 0 \\ 0 & P_{n,2}(t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

donde $P_{n,i}$ son polinomios ortonormales matriciales respecto a Z_i , $i = 1, 2$.

3.1.1. Propiedades de polinomios ortogonales matriciales

A continuación, veremos algunos resultados que generalizan matricialmente las propiedades vistas en la Sección 2.1.1.

Proposición 3.5 (Relación de recurrencia de tres términos). *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales respecto a un peso matricial W . Existen sucesiones de matrices $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde A_{n+1} es no singular y B_n es hermítica $\forall n \geq 0$, tales que*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x)A_{n+1} + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n^*, \quad (3.3)$$

donde $P_{-1}(x) = \theta$.

Demostración. Por lo visto en la Proposición 3.2, podemos escribir $xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x)C_k$ y como $P_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio matricial de grado menor a n entonces, si $0 \leq k \leq n-2$ tenemos que

$$C_k = \langle P_k(x), xP_n(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_k^*(x)W(x)xP_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} (xP_k(x))^*W(x)P_n(x)dx = \langle xP_k(x), P_n(x) \rangle_W = 0$$

Definimos $A_{n+1} = C_{n+1} = \langle P_{n+1}(x), xP_n(x) \rangle_W$ y $B_n = C_n = \langle P_n(x), xP_n(x) \rangle_W$, como $\langle P(x), Q(x) \rangle_W = \langle Q(x), P(x) \rangle_W^*$. Tenemos que

$$C_{n-1} = \langle P_{n-1}(x), xP_n(x) \rangle_W = \langle xP_{n-1}(x), P_n(x) \rangle_W = \langle P_n(x), xP_{n-1}(x) \rangle_W^* = C_n^* = A_n^*,$$

$$B_n = \langle P_n(x), xP_n(x) \rangle_W = \langle xP_n(x), P_n(x) \rangle_W = \langle P_n(x), xP_n(x) \rangle_W^* = B_n^*.$$

□

Corolario 3.6. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos ortogonales respecto a un peso W . Entonces*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)\tilde{B}_n + P_{n-1}(x)\tilde{A}_n, \quad (3.4)$$

donde $S_n\tilde{B}_n$ es una matriz hermítica y $\tilde{A}_n = S_{n-1}^{-1}S_n \forall n \in \mathbb{N}_0$, con $S_n = \|P_n\|^2$.

Demostración. Sea $\{Q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios ortogonales mónicos. Entonces existe una familia de polinomios ortonormales $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y matrices inversibles D_n tales que

$$P_n(x) = Q_n(x)D_n.$$

Reemplazamos en la ecuación (3.4) y obtenemos

$$xQ_n(x)D_n = Q_{n+1}(x)D_{n+1}A_{n+1} + Q_n(x)D_nB_n + Q_{n-1}(x)D_{n-1}A_n^*$$

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x)D_{n+1}A_{n+1}D_n^{-1} + Q_n(x)D_nB_nD_n^{-1} + Q_{n-1}(x)D_{n-1}A_n^*D_n^{-1}.$$

De que Q_n es mónico se deduce que

$$A_{n+1} = D_{n+1}^{-1}D_n.$$

Y de que los polinomios P_n son ortonormales tenemos

$$\begin{aligned}\langle P_n(x), P_n(x) \rangle_W &= I \\ \langle Q_n(x)D_n, Q_n(x)D_n \rangle_W &= I \\ D_n^* \langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle_W D_n &= I \\ D_n^* S_n D_n &= I \\ (D_n^*)^{-1} D_n^{-1} &= S_n,\end{aligned}$$

donde S_n es la norma de Q_n . Luego, de que $A_n^* = D_{n-1}^*(D_n^*)^{-1}$, tenemos que

$$\tilde{A}_n = D_{n-1}A_n^*D_n^{-1} = D_{n-1}D_{n-1}^*(D_n^*)^{-1}D_n^{-1} = S_{n-1}^{-1}S_n.$$

Veamos ahora que $S_n\tilde{B}_n$ es hermítica. Sabemos que B_n es hermítica y $\tilde{B}_n = D_nB_nD_n^{-1}$. Luego

$$(S_n\tilde{B}_n)^* = [(D_n^*)^{-1}D_n^{-1}D_nB_nD_n^{-1}]^* = [(D_n^*)^{-1}B_nD_n^{-1}]^* = (D_n^*)^{-1}B_n^*D_n^{-1} = (D_n^*)^{-1}B_nD_n^{-1} = S_n\tilde{B}_n.$$

□

Corolario 3.7. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos que satisface la relación de recurrencia de tres términos (3.4), donde $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, con $T_k^n \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Entonces los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos están dadas explícitamente por

$$B_n = T_{n-1}^n - T_n^{n+1}$$

y

$$A_n = T_{n-2}^n - T_{n-1}^{n+1} - T_{n-1}^n B_n.$$

Demostración. En la relación de recurrencia de tres términos (3.4) tenemos

$$\sum_{k=0}^n T_k^n x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} T_k^{n+1} x^k + \sum_{k=0}^n T_k^n x^k B_n + \sum_{k=0}^{n-1} T_k^{n-1} x^k A_n.$$

Comparamos los coeficientes de x^n en cada miembro de la igualdad, y tenemos

$$T_{n-1}^n = T_n^{n+1} + T_n^n B_n.$$

Como los polinomios son mónicos, $T_n^n = I$. Por lo tanto $B_n = T_{n-1}^n - T_n^{n+1}$.

Del mismo modo, comparando los coeficientes de x^{n-1} , tenemos

$$T_{n-2}^n = T_{n-1}^{n+1} + T_{n-1}^n B_n + T_{n-1}^{n-1} A_n.$$

Por lo tanto, $A_n = T_{n-2}^n - T_{n-1}^{n+1} - T_{n-1}^n B_n$. □

El siguiente resultado fue introducido por A. Lopes Branquinho y A. Foulquie Moreno en [5], donde generalizan el Teorema de Favard para el caso matricial.

Proposición 3.8 (Teorema de Favard). *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales que satisfacen la relación de recurrencia de tres términos*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x)A_{n+1} + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n^*$$

para $n \geq 0$, donde $P_0 = I$, $P_{-1} = \theta$, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de matrices no singulares y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ son matrices hermíticas.

Entonces existe un peso matricial W tal que $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortonormal respecto a W .

Demostración. Notemos que, por la relación de recurrencia, podemos determinar una sucesión de polinomios de manera recursiva, $P_{-1} = \theta$, $P_0 = I$, para $n = 0$, $xP_0 = P_1A_1 + P_0B_0 + P_{-1}A_0^*$. Entonces

$$P_1 = (xI - B_0)A_1^{-1}$$

es de grado 1. Si P_n es de grado n con coeficiente principal no singular L_n , entonces P_{n+1} es de grado $n + 1$ con coeficiente principal no singular $L_{n+1} = L_nA_{n+1}^{-1}$.

Definimos el siguiente producto interno:

$$\left\langle \sum P_k(x)C_k, \sum P_k(x)D_k \right\rangle = \sum C_k^* D_k$$

Como $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortonormal respecto a este producto interno entonces es no degenerado.

Dados $P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ se verifica que $\langle xP(x), Q(x) \rangle = \langle P(x), xQ(x) \rangle$. Para ver esto basta probar que $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = \langle P_n(x), xP_m(x) \rangle$. Por la relación de recurrencia de tres términos tenemos que

$$\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = \langle P_{n+1}(x)A_{n+1} + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n^*, P_m(x) \rangle$$

$$\langle P_n(x), xP_m(x) \rangle = \langle P_n(x), P_{m+1}(x)A_{m+1} + P_m(x)B_m + P_{m-1}(x)A_m^* \rangle$$

Si $m < n - 1$ o $m > n + 1$ entonces $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = \langle P_n(x), xP_m(x) \rangle = \theta$.

Si $m = n + 1$, entonces $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = A_{n+1}^*$ y $\langle P_n(x), xP_m(x) \rangle = A_m^* = A_{n+1}^*$.

Si $m = n$, entonces $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = B_n^* = B_n$ y $\langle P_n(x), xP_m(x) \rangle = B_m = B_n$.

Si $m = n - 1$, entonces $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = (A_n^*)^* = A_n$ y $\langle P_n(x), xP_m(x) \rangle = A_{m+1} = A_n$.

Así, $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = \langle P_n(x), xP_m(x) \rangle$.

Definimos $\sigma_n = \langle x^n I, I \rangle$ para $n \geq 0$, y por lo anterior tenemos que $\sigma_n = \langle x^i I, x^j I \rangle$ si $i + j = n$, en particular

$$\sigma_n = \langle x^n I, I \rangle = \langle I, x^n I \rangle = \langle x^n I, I \rangle^* = \sigma_n^*$$

Ahora, para todo polinomio matricial $P(x) = \sum C_k x^k$ obtenemos

$$\theta \preceq \langle P(x), P(x) \rangle = \sum_{k,l} C_k^* \langle x^k I, x^l I \rangle C_l$$

por lo tanto, σ_n es definida positiva para $n \geq 0$. Por el Teorema de Krein [31], la sucesión de matrices σ_n es la misma que los momentos, por lo tanto, el producto interno matricial está dado para algún peso W . \square

Como consecuencia del Corolario 3.6, podemos reescribir el Teorema de Favard para polinomios mónicos de la siguiente manera.

Corolario 3.9. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos que satisfacen la relación de recurrencia de tres términos*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n+1}(x)A_n \quad (3.5)$$

donde $P_0 = I$, $P_{-1} = \theta$, $A_n = S_{n-1}^{-1}S_n$ y $S_n B_n$ hermítica para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces existe una matriz de peso W que hace ortogonal a la familia de polinomios.

3.2. Teoría general de operadores diferenciales matriciales

En la Sección 2.1.1 vimos que una de las características de las familias de polinomios ortogonales clásicas es ser autofunción de operadores diferenciales hipergeométricos de segundo orden. Se puede generalizar el problema de Bochner al caso matricial determinando los pesos matriciales W tales que la familia de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociados a él sea autofunción de un operador diferencial matricial hipergeométrico de segundo orden. En esta sección desarrollaremos la teoría de operadores diferenciales matriciales que fue estudiada en [10, 12, 13, 16, 19].

Las definiciones y resultados de esta sección se basan en [16].

Definición 3.8. *Llamamos **operador diferencial de segundo orden a izquierda**, asociado a las matrices polinomiales A_2 , A_1 y A_0 , al operador*

$$D_L = A_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1 \frac{d}{dx} + A_0 \frac{d^0}{dx^0}.$$

Definición 3.9. *Sea W un peso matricial, decimos que el operador diferencial de segundo orden a izquierda es **simétrico** respecto de W si se cumple*

$$\langle DP, Q \rangle_W = \langle P, DQ \rangle_W.$$

Al par $\{W, D\}$ lo llamamos **par clásico**.

Observemos que si un operador diferencial D es simétrico respecto a un peso W , entonces lo mismo vale para cualquier matriz de peso \tilde{W} similar a W . De hecho, si $\tilde{W}(x) = T^*W(x)T$, para una matriz no singular T , entonces tomando los nuevos coeficientes del operador diferencial como $\tilde{A}_i = T^{-1}A_iT$, $i = 0, 1, 2$, se verifica que el nuevo operador diferencial es simétrico respecto a \tilde{W} .

Proposición 3.10. $\{W, D_L\}$ es un par clásico si, y sólo si, la sucesión de polinomios ortonormales $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ respecto al peso W satisface, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$D_L(P_n) = P_n \Lambda_n$$

para ciertas matrices hermíticas Λ_n .

Demostración. Supongamos que $\{W, D_L\}$ es un par clásico. Notemos que $D_L(P_n)$ puede escribirse como combinación lineal de la sucesión de polinomios ortonormales respecto a W , $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, es decir,

$$D_L(P_n) = \sum_{k=0}^n P_k \Gamma_{n,k}.$$

De que $P_n(x)$ son polinomios ortonormales, tenemos

$$\langle D_L(P_n), P_k \rangle_W = \left\langle \sum_{l=0}^n P_l \Gamma_{n,l}, P_k \right\rangle_W = \Gamma_{n,k}^*.$$

Como D_L es simétrico respecto a W , si $k < n$, entonces

$$\Gamma_{n,k}^* = \langle D_L(P_n), P_k \rangle_W = \langle P_n, D_L(P_k) \rangle_W = \theta.$$

Si $k = n$,

$$\begin{aligned} \langle D_L(P_n), P_n \rangle_W &= \left\langle \sum_{k=0}^n P_k \Gamma_{n,k}, P_n \right\rangle_W = \sum_{k=0}^n \Gamma_{n,k}^* \langle P_k, P_n \rangle_W = \Gamma_{n,n}^* \langle P_n, P_n \rangle_W = \Gamma_{n,n}^* \\ \langle P_n, D_L(P_n) \rangle_W &= \left\langle P_n, \sum_{k=0}^n P_k \Gamma_{n,k} \right\rangle_W = \sum_{k=0}^n \langle P_k, P_n \rangle_W \Gamma_{n,k} = \langle P_n, P_n \rangle_W \Gamma_{n,n} = \Gamma_{n,n} \end{aligned}$$

Así, $\Gamma_{n,n}^* = \Gamma_{n,n}$. Por lo tanto, $\Gamma_{n,n}$ es hermítica.

Supongamos ahora que $D_L(P_n) = P_n \Lambda_n$, con Λ_n hermítica. Entonces

$$\begin{aligned} \langle D_L(P_n), P_n \rangle_W &= \langle P_n \Lambda_n, P_n \rangle_W = \Lambda_n^* \langle P_n, P_n \rangle_W = \Lambda_n^* = \Lambda_n \\ \langle P_n, D_L(P_n) \rangle_W &= \langle P_n, P_n \Lambda_n \rangle_W = \langle P_n, P_n \rangle_W \Lambda_n = \Lambda_n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle D_L(P_n), P_n \rangle_W = \langle P_n, D_L(P_n) \rangle_W$. Así, D_L es simétrico respecto a W . □

Corolario 3.11. Sea $\{W, D_L\}$ un par clásico, donde

$$D_L = A_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1 \frac{d}{dx} + A_0 \frac{d^0}{dx^0}.$$

Entonces A_2 , A_1 y A_0 son polinomios matriciales de grado a lo sumo 2, 1 y 0, respectivamente.

Demostración. Sea $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortonormales respecto a W . Entonces $P_0 = C$, donde C es una matriz inversible. Aplicando el operador diferencial de segundo orden obtenemos

$$D_L(C) = A_2 \frac{d^2 C}{dx^2} + A_1 \frac{dC}{dx} + A_0 C = A_0 C,$$

y, por la proposición anterior, $D_L(C) = C\Lambda_0$. Entonces,

$$\begin{aligned} C\Lambda_0 &= A_0C \\ C\Lambda_0C^{-1} &= A_0CC^{-1} \\ C\Lambda_0C^{-1} &= A_0 \end{aligned}$$

Así, A_0 es una matriz constante.

Del mismo modo, si $P_1(x) = (C_1x + C_0)$, con C_1 inversible, entonces

$$\begin{aligned} A_1C_1 + A_0P_1 &= \Lambda_1(C_1x + C_0) \\ A_1C_1 + A_0P_1 &= \Lambda_1C_1x + \Lambda_1C_0 \\ A_1C_1C_1^{-1} &= [\Lambda_1C_1x + \Lambda_1C_0 - A_0P_1]C_1^{-1} \\ A_1 &= \Lambda_1x + \Lambda_1C_0C_1^{-1} - A_0P_1C_1^{-1} \end{aligned}$$

por lo tanto, A_1 es de grado a lo sumo 1.

Por último, si $P_2(x) = (B_2x^2 + B_1x + B_0)$, con B_2 inversible, entonces

$$\begin{aligned} 2A_2B_2 + A_1P_2' + A_0P_2 &= \Lambda_2P_2 \\ 2A_2B_2 \left(\frac{1}{2}B_2^{-1}\right) &= [(\Lambda_2 - A_0)P_2 - A_1P_2'] \left(\frac{1}{2}B_2^{-1}\right) \\ A_2 &= [(\Lambda_2 - A_0)B_2x^2 + (\Lambda_2 - A_0)B_1x + (\Lambda_2 - A_0)B_0 - A_1P_2'] \left(\frac{1}{2}B_2^{-1}\right) \\ A_2 &= \frac{1}{2}(\Lambda_2 - A_0)x^2 + (\Lambda_2 - A_0)\frac{1}{2}B_1B_2^{-1}x + (\Lambda_2 - A_0)\frac{1}{2}B_0B_2^{-1} - \frac{1}{2}A_1P_2'B_2^{-1} \end{aligned}$$

A_2 es de grado a lo sumo 2. □

El siguiente resultado aborda las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la simetría de un peso matricial respecto a un operador diferencial. Este teorema se debe a A. Durán y F. Grünbaum [20].

Proposición 3.12. *Sea el operador diferencial a izquierda*

$$D = A_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1 \frac{d}{dx} + A_0$$

con A_2 , A_1 y A_0 polinomios matriciales de grado 2, 1 y 0 respectivamente, y sea $W(x)$ una matriz de peso. Entonces, D es simétrico respecto a $W(x)$ si y sólo si se verifican las siguientes ecuaciones diferenciales matriciales

$$WA_2 = A_2^*W \tag{3.6}$$

$$2(WA_2)' = A_1^*W + WA_1 \tag{3.7}$$

$$(WA_2)'' = (WA_1)' + A_0^*W - WA_0, \tag{3.8}$$

con las condiciones de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} WA_2 = \theta \tag{3.9}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (WA_2)' - WA_1 = \theta. \tag{3.10}$$

Capítulo 4

Polinomios matriciales de Hermite

En este capítulo encontraremos la esencia de este trabajo. El objetivo del mismo es encontrar familias de polinomios matriciales mónicos definidos sobre \mathbb{R} que sean solución de la ecuación diferencial

$$I \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) + (C - xU) \frac{d}{dx} P_n(x) - V P_n(x) = P_n(x) \Lambda_n \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (4.1)$$

donde $U, V, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y el autovalor es diagonal $\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}$, con $\lambda_n \neq \mu_n \forall n \in \mathbb{N}_0$. Además, buscamos un peso matricial W respecto al cual el operador diferencial a izquierda

$$D = I \frac{d^2}{dx^2} + (C - xU) \frac{d}{dx} - V \quad (4.2)$$

sea simétrico, y las familias de polinomios sean ortogonales respecto a él, es decir,

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n^*(x) W(x) P_m(x) = S_n \delta_{n,m},$$

donde S_n es la norma de los polinomios P_n .

Notemos que las matrices C, U y V no dependen de n ni x .

En el siguiente resultado daremos las condiciones necesarias para que las autofunciones de la ecuación diferencial (4.1) sean polinomios matriciales mónicos.

Proposición 4.1. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos definidos en $\mathbb{C}^{2 \times 2}[x]$ tal que $P_n(x)$ es autofunción del operador diferencial D (4.2), $D(P_n) = P_n \Lambda_n$, con $\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}$, $\lambda_n \neq \mu_n \forall n \in \mathbb{N}_0$. Entonces U y V son matrices diagonales y $\Lambda_n = -nU - V$.*

Demostración. Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, con $T_k^n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Sustituimos esta expresión en la ecuación diferencial

(4.1),

$$D(P_n) = \left[I \frac{d^2}{dx^2} + (C - xU) \frac{d}{dx} - V \right] P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^n k(k-1) T_k^n x^{k-2} \right) + (C - xU) \left(\sum_{k=0}^n k T_k^n x^{k-1} \right) - V \left(\sum_{k=0}^n T_k^n x^k \right) = \left(\sum_{k=0}^n T_k^n x^k \right) \Lambda_n$$

y consideramos el coeficiente de x^n en ambos miembros de la ecuación. Así, tenemos

$$-nU - V = \Lambda_n$$

Por lo tanto, si $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ obtenemos las siguientes igualdades, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\lambda_n = -nu_{11} - v_{11};$$

$$0 = -nu_{12} - v_{12};$$

$$0 = -nu_{21} - v_{21};$$

$$\mu_n = -nu_{22} - v_{22}.$$

Así, $u_{12} = u_{21} = v_{12} = v_{21} = 0$ y, por lo tanto, las matrices U y V son diagonales. \square

Observación 4.1. Si en la ecuación diferencial (4.1) sumamos $\alpha P_n(x)$ en ambos miembros, con $\alpha \in \mathbb{C}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) + (C - xU) \frac{d}{dx} P_n(x) - V P_n(x) + \alpha P_n(x) &= P_n(x) \Lambda_n + \alpha P_n(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) + (C - xU) \frac{d}{dx} P_n(x) - (V - \alpha I) P_n(x) &= P_n(x) (\Lambda_n + \alpha I) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, $P_n(x)$ es autofunción del operador diferencial (4.1) y de (4.3). Así, tomando $\alpha = v_{22}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad en (4.1) que $U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ y $\Lambda_n = \begin{pmatrix} -nu_1 - v & 0 \\ 0 & -nu_2 \end{pmatrix}$, donde $v = v_{11} - v_{22}$, $u_1 = u_{11}$ y $u_2 = u_{22}$.

Proposición 4.2. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales que son autofunción del operador diferencial definido en (4.2) y que verifican la relación de recurrencia

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

donde $P_{-1} = \theta$, $P_0 = I$, A_n es inversible y $S_n B_n$ es hermítica para todo $n \in \mathbb{N}_0$, con $S_n = \|P_n\|^2$. Entonces, S_n y A_n son definidas positivas y diagonales, y la matriz Λ_n es real $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Por definición, $S_n = \langle P_n, P_n \rangle_W$, entonces es definida positiva. De que el operador

diferencial es simétrico respecto a W tenemos que

$$\begin{aligned}\langle D(P_n), P_n \rangle_W &= \langle P_n, D(P_n) \rangle_W \\ \langle P_n \Lambda_n, P_n \rangle_W &= \langle P_n, P_n \Lambda_n \rangle_W \\ \Lambda_n^* \langle P_n, P_n \rangle_W &= \langle P_n, P_n \rangle_W \Lambda_n \\ \Lambda_n^* S_n &= S_n \Lambda_n.\end{aligned}$$

Así, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overline{\lambda_n} & 0 \\ 0 & \overline{\mu_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}^n & s_{12}^n \\ s_{21}^n & s_{22}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_{11}^n & s_{12}^n \\ s_{21}^n & s_{22}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \overline{\lambda_n} s_{11}^n & \overline{\lambda_n} s_{12}^n \\ \overline{\mu_n} s_{21}^n & \overline{\mu_n} s_{22}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_n s_{11}^n & \mu_n s_{12}^n \\ \lambda_n s_{21}^n & \mu_n s_{22}^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Como S_n es definida positiva, $s_{11}^n, s_{22}^n > 0$, entonces $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, $\overline{\lambda_n} s_{12}^n = \mu_n s_{12}^n$. Entonces,

$$(\lambda_n - \mu_n) s_{12}^n = 0.$$

Luego, como $\lambda_n \neq \mu_n$ tenemos que $s_{12}^n = s_{21}^n = 0$.

De que $A_{n+1} = S_n^{-1} S_{n+1}$, tenemos que A_{n+1} es definida positiva y diagonal.

□

El siguiente resultado reescribe la ecuación diferencial matricial $D(P_n) = P_n \Lambda_n$ como un sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales.

Proposición 4.3. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales autofunción del operador diferencial (4.2), donde $P_n(x) = [F_n(x) : G_n(x)]$, con $F_n(x), G_n(x) \in \mathbb{C}^2[x]$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces, la ecuación diferencial matricial (4.1) queda definida por las ecuaciones vectoriales*

$$\frac{d^2}{dx^2} F_n(x) + (C - xU) \frac{d}{dx} F_n(x) - V F_n(x) = F_n(x) \lambda_n, \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} G_n(x) + (C - xU) \frac{d}{dx} G_n(x) - V G_n(x) = G_n(x) \mu_n. \quad (4.5)$$

Demostración. Sea $P_n(x) = \begin{pmatrix} p_{11}^n(x) & p_{12}^n(x) \\ p_{21}^n(x) & p_{22}^n(x) \end{pmatrix}$, entonces $F_n(x) = \begin{pmatrix} p_{11}^n(x) \\ p_{21}^n(x) \end{pmatrix}$ y $G_n(x) = \begin{pmatrix} p_{12}^n(x) \\ p_{22}^n(x) \end{pmatrix}$. Como

$$\frac{d^k}{dx^k} [F_n(x) : G_n(x)] = \left[\frac{d^k}{dx^k} F_n(x) : \frac{d^k}{dx^k} G_n(x) \right]$$

y

$$A [F_n(x) : G_n(x)] = [A F_n(x) : A G_n(x)]$$

para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. De la ecuación

$$\frac{d^2}{dx^2}P_n(x) + (C - xU)\frac{d}{dx}P_n(x) - VP_n(x) = P_n(x)\Lambda_n,$$

tenemos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dx^2}F_n(x) : \frac{d^2}{dx^2}G_n(x) \right] + \left[(C - xU)\frac{d}{dx}F_n(x) : (C - xU)\frac{d}{dx}G_n(x) \right] - [VF_n(x) : VG_n(x)] = \\ & [F_n(x) : G_n(x)] \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix} = [\lambda_n F_n(x) : \mu_n G_n(x)] \end{aligned}$$

Luego, igualando por columnas, obtenemos las ecuaciones diferenciales vectoriales

$$\frac{d^2}{dx^2}F_n(x) + (C - xU)\frac{d}{dx}F_n(x) - VF_n(x) = F_n(x)\lambda_n$$

$$\frac{d^2}{dx^2}G_n(x) + (C - xU)\frac{d}{dx}G_n(x) - VG_n(x) = G_n(x)\mu_n$$

□

Proposición 4.4. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios autofunción del operador diferencial (4.2), donde $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, tales que $T_k^n = [F_k^n : G_k^n]$, con $F_k^n, G_k^n \in \mathbb{C}^2$ para $0 \leq k \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Si $P_n(x)$ es

mónico, entonces $F_n^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $G_n^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para $k = n - 1$, se cumple

$$(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})F_{n-1}^n = \begin{pmatrix} nc_{11} \\ nc_{21} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$(\mu_n I - \Lambda_{n-1})G_{n-1}^n = \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix}; \quad (4.7)$$

y para $0 \leq k \leq n - 2$

$$(\lambda_n I - \Lambda_k)F_k^n = (k+2)(k+1)F_{k+2}^n + (k+1)CF_{k+1}^n, \quad (4.8)$$

$$(\mu_n I - \Lambda_k)G_k^n = (k+2)(k+1)G_{k+2}^n + (k+1)CG_{k+1}^n. \quad (4.9)$$

Demostración. Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k = \sum_{k=0}^n [F_k^n : G_k^n] x^k$. De que los polinomios $P_n(x)$ son mónicos, tenemos

que $T_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto, $F_n^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $G_n^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por lo visto en la proposición 4.3, podemos reescribir la ecuación (4.1) como un sistema de ecuaciones vectoriales. Reemplazamos $P_n(x)$ en (4.4) y (4.5) y obtenemos

$$\left(\sum_{k=0}^n k(k-1)F_k^n x^{k-2} \right) + (C - xU) \left(\sum_{k=0}^n kF_k^n x^{k-1} \right) - V \left(\sum_{k=0}^n F_k^n x^k \right) = \left(\sum_{k=0}^n F_k^n x^k \right) \lambda_n,$$

$$\left(\sum_{k=0}^n k(k-1)G_k^n x^{k-2} \right) + (C - xU) \left(\sum_{k=0}^n kG_k^n x^{k-1} \right) - V \left(\sum_{k=0}^n G_k^n x^k \right) = \left(\sum_{k=0}^n G_k^n x^k \right) \mu_n.$$

De la primer ecuación obtendremos (4.8). Analizamos los coeficientes de x^{n-1} en ambos miembros de la ecuación y obtenemos

$$nC F_n^n - (n-1)U F_{n-1}^n - V F_{n-1}^n = F_{n-1}^n \lambda_n.$$

De que $\Lambda_k = -kU - V$, tenemos

$$\begin{aligned} nC F_n^n + \Lambda_{n-1} F_{n-1}^n &= F_{n-1}^n \lambda_n \\ n \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= F_{n-1}^n \lambda_n - \Lambda_{n-1} F_{n-1}^n \\ n \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} &= (\lambda_n I - \Lambda_{n-1}) F_{n-1}^n. \end{aligned}$$

De manera similar, analizamos los coeficientes de x^k para $0 \leq k \leq n-2$. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)F_{k+2}^n + (k+1)C F_{k+1}^n - kU F_k^n - V F_k^n &= F_k^n \lambda_n \\ (k+2)(k+1)F_{k+2}^n + (k+1)C F_{k+1}^n + \Lambda_k F_k^n &= F_k^n \lambda_n \\ (k+2)(k+1)F_{k+2}^n + (k+1)C F_{k+1}^n &= (\lambda_n I - \Lambda_k) F_k^n. \end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera, de la segunda ecuación obtenemos (4.9), obtenemos □

Proposición 4.5. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos autofunción del operador diferencial a izquierda*

$$D = I \frac{d^2}{dx^2} + (C - xU) \frac{d}{dx} - V$$

con $U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y autovalor $\Lambda_n = \begin{pmatrix} -nu_1 - v & 0 \\ 0 & -nu_2 \end{pmatrix}$. Entonces u_1 y u_2 son no nulos.

Demostración. Consideramos que $F_k^n = \begin{pmatrix} F_k^{n(1)} \\ F_k^{n(2)} \end{pmatrix}$ y $G_k^n = \begin{pmatrix} G_k^{n(1)} \\ G_k^{n(2)} \end{pmatrix}$. Supongamos que $u_1 = u_2 = 0$. Si resolvemos las ecuaciones (4.6) y (4.7) de la proposición anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} F_{n-1}^n &= \begin{pmatrix} nc_{11} \\ nc_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_{11} = 0 \\ c_{22} = 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G_{n-1}^n &= \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -v F_{n-1}^{n(2)} = nc_{21} \\ v G_{n-1}^{n(1)} = nc_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $v = 0$, entonces $c_{12} = c_{21} = 0$, por lo que el operador diferencial (4.2) queda diagonal, y reduce al caso clásico. Si $v \neq 0$ tenemos que $F_{n-1}^{n(2)} = -\frac{nc_{21}}{v}$ y $G_{n-1}^{n(1)} = \frac{nc_{12}}{v}$. Resolvemos las ecuaciones (4.8) y (4.9) para $k = n-2$, obteniendo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2}^{n(1)} \\ F_{n-2}^{n(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 0 \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1}^{n(1)} \\ -\frac{nc_{21}}{v} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-2}^{n(1)} \\ G_{n-2}^{n(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ n(n-1) \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{nc_{12}}{v} \\ G_{n-1}^{n(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} n(n-1) \left(1 - \frac{c_{12}c_{21}}{v}\right) = 0 \\ -vF_{n-2(2)}^2 = (n-1)c_{21}F_{n-1(1)}^n \\ vG_{n-2(1)}^2 = (n-1)c_{12}G_{n-1(2)}^n \\ n(n-1) \left(1 + \frac{c_{12}c_{21}}{v}\right) = 0 \end{cases}$$

Dado que estas ecuaciones se deben verificar para todo n , de la primer ecuación tenemos que $\frac{c_{12}c_{21}}{v} = 1$ y de la cuarta ecuación tenemos $\frac{c_{12}c_{21}}{v} = -1$, lo que es absurdo.

Supongamos ahora que $u_1 \neq 0$ y $u_2 = 0$. Con un procedimiento similar al punto anterior, resolviendo (4.6) y (4.7), obtenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -u_1 & 0 \\ 0 & -nu_1 - v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1(1)}^n \\ F_{n-1(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} nc_{11} \\ nc_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u_1 F_{n-1(1)}^n = nc_{11} \\ (-nu_1 - v) F_{n-1(2)}^n = nc_{21} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} (n-1)u_1 + v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-1(1)}^n \\ G_{n-1(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} [(n-1)u_1 + v] G_{n-1(1)}^n = nc_{12} \\ c_{22} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que, del hecho de que $u_1 \neq 0$, se deduce que $nu_1 \pm v \neq 0$, pues v no depende de n . Por lo tanto, $F_{n-1(1)}^n = -\frac{nc_{11}}{u_1}$, $F_{n-1(2)}^n = \frac{nc_{21}}{-nu_1 - v}$ y $G_{n-1(1)}^n = \frac{nc_{12}}{(n-1)u_1 + v}$. Reemplazamos estos valores y resolvemos las ecuaciones (4.8) y (4.9) para $k = n - 2$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2u_1 & 0 \\ 0 & -nu_1 - v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2(1)}^n \\ F_{n-2(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 0 \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{nc_{11}}{u_1} \\ \frac{nc_{21}}{-nu_1 - v} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} (n-2)u_1 + v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-2(1)}^n \\ G_{n-2(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ n(n-1) \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{nc_{12}}{(n-1)u_1 + v} \\ G_{n-1(2)}^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{cases} -2u_1 F_{n-2(1)}^n = n(n-1) \left[1 + \frac{c_{11}c_{21}}{-nu_1 - v} - \frac{c_{11}c_{21}}{u_1}\right] \\ (-nu_1 - v) F_{n-2(2)}^n = n(n-1) \frac{c_{21}^2}{-nu_1 - v} \\ [(n-2)u_1 + v] G_{n-2(1)}^n = n(n-1) \frac{c_{12}c_{11}}{(n-1)u_1 + v} + (n-1)c_{12}G_{n-1(2)}^n \\ n(n-1) \left(1 + \frac{c_{12}c_{21}}{(n-1)u_1 + v}\right) = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación tenemos que $\frac{c_{12}c_{21}}{(n-1)u_1 + v} = -1$. Dado que c_{12} , c_{21} , u_1 y v son constantes que no dependen de n , la última igualdad solo es posible si $u_1 = 0$, lo que es absurdo.

Análogamente se prueba para $u_1 = 0$ y $u_2 \neq 0$. Por lo tanto, no es posible que $u_1 = 0$ o $u_2 = 0$. \square

4.1. Resultados

Nuestro objetivo es hallar la expresión de los polinomios matriciales mónicos P_n que son solución de la ecuación diferencial (4.1) definida al comienzo de este capítulo. Para esto buscamos la forma de los coeficientes

A_n y B_n de la relación de recurrencia (3.4), los cuales podemos hallar, por lo visto en el Corolario 3.7, partir la expresión de los términos F_k^n y G_k^n , utilizando el resultado visto en la Proposición 4.4.

Además, buscamos las condiciones que deben cumplir los coeficientes del operador diferencial para poder plantear las ecuaciones de simetría de la Proposición 3.12 y, así, hallar la matriz de peso que hace ortogonales a los polinomios.

Procedemos analizando los términos $(\lambda_n I - \Lambda_k)$ y $(\mu_n I - \Lambda_k)$, ya que si estos son inversibles, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, la expresión de los términos F_k^n, G_k^n queda unívocamente determinado, obteniendo familias únicas de polinomios ortogonales mónicos. En caso contrario, si alguno de ellos es no inversible para todo $n \in \mathbb{N}_0$, obtenemos familias de polinomios ortogonales mónicos no únicas. En particular, por lo visto en el Corolario 3.7, nuestro interés está en analizar los casos $k = n - 1$ y $k = n - 2$. Analizamos los siguientes casos $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

1. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ es no inversible y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ es inversible, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
2. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ es inversible y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ no es inversible, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
3. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son no inversibles, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
4. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son inversibles, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

4.1.1. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ es no inversible y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ es inversible, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda_n I - \Lambda_{n-1}) &= \begin{pmatrix} -u_1 & 0 \\ 0 & -nu_1 + (n-1)u_2 - v \end{pmatrix}, \\ (\mu_n I - \Lambda_{n-1}) &= \begin{pmatrix} (n-1)u_1 - nu_2 + v & 0 \\ 0 & -u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para que la matriz $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ sea singular debe cumplirse que $u_1 = 0$ o $n(u_2 - u_1) - (u_2 + v) = 0$. Por lo visto en la Proposición 4.5, no es posible que u_1 sea nulo. Analizamos el segundo caso. Estas condiciones se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}_0$ si $u_1 = u_2 = -v$.

Proposición 4.6. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}[x]$ una familia de polinomios matriciales mónicos, donde $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, $T_k^n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, que son autofunción del operador diferencial definido en (4.2), con autovalor diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}$. Si $u_1 = u_2 = -v$, entonces $c_{21} = 0$ y*

$$\begin{aligned} T_{n-1}^n &= \begin{pmatrix} \frac{nc_{11}}{v} & \frac{nc_{12}}{2v} \\ F_{n-1(2)}^n & \frac{nc_{22}}{v} \end{pmatrix}, \\ T_{n-2}^n &= \begin{pmatrix} \frac{(n-1)(n(c_{22}^2+v)+vc_{12}F_{n-1(2)}^n)}{2v^2} & \frac{n(n-1)c_{12}c_{22}}{2v^2} \\ \frac{(n-1)c_{22}F_{n-1(2)}^n}{v} & \frac{n(n-1)(c_{22}^2+v)}{2v^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$. Consideramos $T_k^n = [F_k^n : G_k^n]$, donde $F_k^n, G_k^n \in \mathbb{C}^2$. Si desarrollamos las ecuaciones de la Proposición 4.4 para $k = n - 1$ y $k = n - 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1(1)}^n \\ F_{n-1(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} nc_{11} \\ nc_{21} \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 2v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2(1)}^n \\ F_{n-2(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 0 \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1(1)}^n \\ F_{n-1(2)}^n \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 2v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-1(1)}^n \\ G_{n-1(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 3v & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-2(1)}^n \\ G_{n-2(2)}^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ n(n-1) \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-1(1)}^n \\ G_{n-1(2)}^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que, como $u_1 = u_2 = -v$, y por la Proposición 4.5, tenemos que $v \neq 0$.

De la primer ecuación tenemos que $nc_{21} = 0$. Por lo tanto, $c_{21} = 0$ y la variable $F_{n-1(2)}^n$ queda libre. Despejando los valores de F_k^n, G_k^n , $k = n - 1, n - 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} T_{n-1}^n &= (F_{n-1}^n : G_{n-1}^n) = \begin{pmatrix} \frac{nc_{11}}{v} & \frac{nc_{12}}{2v} \\ F_{n-1(2)}^n & \frac{nc_{22}}{v} \end{pmatrix} \\ T_{n-2}^n &= (F_{n-2}^n : G_{n-2}^n) = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)(n(c_{22}^2+v)+vc_{12}F_{n-1(2)}^n)}{2v^2} & \frac{n(n-1)c_{12}c_{22}}{2v^2} \\ \frac{(n-1)c_{22}F_{n-1(2)}^n}{v} & \frac{n(n-1)(c_{22}^2+v)}{2v^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Observemos que, $F_{-1(2)}^0 = 0$ ya que $P_0(x) = I$. Para simplicidad notaremos $k_n = F_{n-1(2)}^n$.

Proposición 4.7. *Sea D el operador diferencial definido en (4.2). Si $c_{21} = 0$, entonces, vía conjugación, D es similar al operador*

$$\tilde{D} = I \frac{d^2}{dx^2} + (\tilde{C} - xU) \frac{d}{dx} - V \quad (4.10)$$

donde $\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 1 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$.

Demostración. Buscamos una matriz inversible M tal que $V = M^{-1}VM$ y $\tilde{C} - xU = M^{-1}(C - xU)M$.

Consideramos $M = \begin{pmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz es inversible, ya que sólo consideramos $c_{12} \neq 0$, pues en caso contrario el operador diferencial es diagonal y es similar al caso clásico, que no es de nuestro interés.

Así, tenemos que

$$M^{-1}VM = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$M^{-1}(C - xU)M = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} + xv & c_{12} \\ 0 & c_{22} + xv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} + xv & 1 \\ 0 & c_{22} + xv \end{pmatrix}.$$

□

A continuación, buscamos los coeficientes de la relación de recurrencia A_n y B_n , y las condiciones que estos deben cumplir para verificar las hipótesis del Teorema de Favard, es decir, que A_n sea diagonal e inversible y que $S_n B_n$ sea hermítica.

Proposición 4.8. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos autofunción del operador diferencial (4.10) y que verifican la relación de recurrencia*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

donde $P_{-1}(x) = \theta$, $P_0(x) = I$. Entonces,

- Si $c_{11} = c_{22}$ y $|k_n| < 2n$, A_n es diagonal e inversible,
- La matriz $S_n B_n$ es hermítica siempre que $c_{22} \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{s_1^n}{s_2^n} = 2v(k_{n+1} - k_n) \quad (4.11)$$

donde s_1^n y s_2^n son los elementos de la diagonal de S_n .

Demostración. Del Corolario 3.7 tenemos que

$$B_n = T_{n-1}^n - T_n^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{-c_{11}}{v} & \frac{-1}{2v} \\ k_n - k_{n+1} & \frac{-c_{22}}{v} \end{pmatrix}$$

$$A_n = T_{n-2}^n - T_{n-1}^{n+1} - T_{n-1}^n B_n = \begin{pmatrix} \frac{-2n-k_n}{2v} & \frac{n(c_{11}-c_{22})}{6v^2} \\ \frac{(c_{11}-c_{22})k_n}{v} & \frac{-2n+k_n}{2v} \end{pmatrix}$$

La matriz A_n es diagonal si, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$n(c_{11} - c_{22}) = 0$$

$$k_n(c_{11} - c_{22}) = 0$$

por lo tanto, es diagonal siempre que $c_{11} = c_{22}$.

Por otro lado, $\text{Det}(A_n) = \frac{4n^2 - k_n^2}{4v^2}$, por lo que A_n es inversible siempre que $|k_n| \neq 2n$, pero de que A_n es definida positiva, tenemos que $|k_n| < 2n$.

Ahora, bajo estas condiciones, veamos cuándo $S_n B_n$ es hermítica. Para esto, se debe cumplir

$$S_n B_n = B_n^* S_n^*$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{s_1^n c_{22}}{v} & -\frac{s_1^n}{2v} \\ s_2^n(k_n - k_{n+1}) & -\frac{s_2^n c_{22}}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s_1^n \overline{c_{22}}}{v} & s_2^n \overline{(k_n - k_{n+1})} \\ -\frac{s_1^n}{2v} & -\frac{s_2^n \overline{c_{22}}}{v} \end{pmatrix}$$

Comparando los elementos de ambas matrices tenemos que $c_{22} = \overline{c_{22}}$, por lo tanto, $c_{22} \in \mathbb{R}$. Por otro lado, tenemos que

$$-\frac{s_1^n}{2v} = s_2^n(k_n - k_{n+1})$$

que es lo mismo que

$$\frac{s_1^n}{s_2^n} = 2v(k_{n+1} - k_n)$$

□

Una vez halladas las condiciones necesarias que deben cumplir los coeficientes A_n y B_n de la relación de recurrencia de tres términos, por el Teorema de Favard para polinomios matriciales mónicos (3.9), podemos encontrar un peso matricial W tal que la sucesión de polinomios sea ortogonal respecto a él.

Proposición 4.9. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos que son autofunción del operador diferencial (4.10) y que satisfacen la relación de recurrencia de la Proposición 4.8. Si $v < 0$ y $\chi > \frac{c_{22}^2}{4v^2} > 0$, entonces*

$$W(x) = e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{(c_{22}+vx)}{2v} \\ \frac{(c_{22}+vx)}{2v} & \frac{4v\chi + (2c_{22}+vx)x}{4v} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

es una función de peso irreducible respecto al cual el operador \tilde{D} es simétrico.

Demostración. Para hallar $W(x)$ resolvemos las ecuaciones de simetría (3.6), (3.7) y (3.8), donde

$$A_0 = -V$$

$$A_1 = \tilde{C} + xvI$$

$$A_2 = I$$

La ecuación (3.6) es trivial, de la ecuación (3.7) obtenemos

$$\begin{pmatrix} w'_{11}(x) & w'_{12}(x) \\ w'_{21}(x) & w'_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(c_{22} + xv)w_{11}(x) & w_{11}(x) + 2(c_{22} + xv)w_{12}(x) \\ w_{11}(x) + 2(c_{22} + xv)w_{21}(x) & w_{12}(x) + w_{21}(x) + 2(c_{22} + xv)w_{22}(x) \end{pmatrix}$$

Al resolver estas ecuaciones diferenciales nos queda

$$W(x) = e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} \chi_{11} & \frac{1}{2}(x\chi_{11} + 2\chi_{12}) \\ \frac{1}{2}(x\chi_{11} + 2\chi_{21}) & \frac{1}{4}(x^2\chi_{11} + 2x(\chi_{12} + \chi_{21}) + 4\chi_{22}) \end{pmatrix}$$

donde χ_{11} , χ_{12} , χ_{21} y χ_{22} son constantes de integración. Ahora, si reemplazamos en la ecuación (3.8) tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2}(c_{22}\chi_{11} - 2v\chi_{12}) \\ -\frac{1}{2}e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2}(c_{22}\chi_{11} - 2v\chi_{21}) & \frac{1}{2}e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2}(c_{22} + xv)(\chi_{12} - \chi_{21}) \end{pmatrix} = \theta$$

esto se verifica si $\chi_{12} = \chi_{21} = \frac{c_{22}\chi_{11}}{2v}$, y tomando $\chi = \frac{\chi_{22}}{\chi_{11}}$, podemos escribir la matriz W como

$$W(x) = e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}+vx}{2v} \\ \frac{c_{22}+vx}{2v} & \frac{4v\chi + 2c_{22}x + vx^2}{4v} \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz sea de peso, debe ser definida positiva. De que c_{22} y v son reales, es claro que la matriz W es hermítica y

$$\text{Det}(W(x)) = e^{2c_{22}x + vx^2} \frac{4v^2\chi - c_{22}^2}{4v^2}$$

Por lo tanto, si $\chi > \frac{c_{22}^2}{4v^2}$, la matriz W es definida positiva.

Por último, las condiciones de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}+vx}{2v} \\ \frac{c_{22}+vx}{2v} & \frac{4v\chi + 2c_{22}x + vx^2}{4v} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W'(x) - W(x)(C + xvI) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

se verifican si $v < 0$.

Veamos que el peso es irreducible. Supongamos que existe una matriz inversible $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\widetilde{W}(x) = M^*W(x)M$, donde $\widetilde{W}(x)$ es una matriz diagonal. Analizamos el elemento $[1, 2]$ y vemos bajo qué condiciones se anula:

$$\begin{aligned} M^*WM_{[1,2]} &= e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \frac{1}{4v} [2\bar{a}(c_{22}d + 2vb + dvx) + \bar{c}(2c_{22}dx + 2b(c_{22} + vx) + dv(x^2 + 4\chi))] \\ &= e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \frac{1}{4v} [(dv\bar{c})x^2 + 2(dv\bar{a} + (c_{22}d + bv)\bar{c})x + (2((c_{22}d + 2bv)\bar{a} + (bc_{22} + 2dv\chi)\bar{c}))]. \end{aligned}$$

El coeficiente de x^2 se anula si $c = 0$ o $d = 0$, pero no ambos pues M es inversible. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c = 0$. Entonces, el coeficiente de x se anula si $a = 0$ o $d = 0$. En ambos casos contradice que M sea inversible. Lo cual es absurdo, por lo que no existe tal matriz M . Por lo tanto, el peso es irreducible. \square

Observemos que, como el operador \tilde{D} es simétrico respecto al peso W y la familia de polinomios matriciales mónicos $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es autofunción del operador diferencial \tilde{D} con autovalor $\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}$, entonces, por lo visto en la Proposición 3.10, tenemos que la familia de polinomios matriciales mónicos es ortogonal respecto al peso W .

Una vez obtenida la matriz de peso, podemos hallar la forma explícita del término k_n .

Proposición 4.10. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ familia de polinomios matriciales mónicos, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, con $T_k^n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y T_{n-1}^n, T_{n-2}^n definidos como en la Proposición 4.6, autofunción del operador diferencial \tilde{D} definido en (4.10) y ortogonal respecto al peso*

$$W(x) = e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}+vx}{2v} \\ \frac{c_{22}+vx}{2v} & \frac{4v\chi + 2c_{22}x + vx^2}{4v} \end{pmatrix}$$

entonces

$$k_n = \frac{2vn}{4v^2\chi - c_{22}^2 + nv} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.15)$$

Demostración. Probaremos por inducción sobre n .

Como mencionamos antes, de que $P_0(x) = I$, tenemos que $k_0 = 0$.

Para $n = 1$, de la ecuación (4.11) tenemos que $k_1 = \frac{s_1^0}{2vs_2^0} - k_0$, y de que

$$S_0 = \|P_0(x)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} W(x)dx = \begin{pmatrix} e^{-\frac{c_{22}^2}{2v}} \sqrt{\frac{2\pi}{-v}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{c_{22}^2}{2v}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{4v^2\chi - v - c_{22}^2}{2(-v)^{5/2}} \end{pmatrix}$$

obtenemos que $k_1 = \frac{2v}{4v^2\chi - c_{22}^2 + v}$

Supongamos ahora que $k_n = \frac{2vn}{4v^2\chi - c_{22}^2 + nv}$ para $n > 1$.

Sabemos que $S_n = S_{n-1}A_n = \dots = S_0A_1 \dots A_n$ y que

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{-2n-k_n}{2v} & 0 \\ 0 & \frac{-2n+k_n}{2v} \end{pmatrix}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= \frac{s_1^n}{2vs_2^n} + k_n \\ &= \frac{1}{2v} \frac{s_1^0 a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n}{s_2^0 a_2^1 a_2^2 \dots a_2^n} + \frac{2vn}{4v^2\chi - c_{22}^2 + nv} \\ &= \frac{1}{2v} \frac{4v^2(4v^2\chi - c_{22}^2)}{[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv][4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]} + \frac{2vn}{4v^2\chi - c_{22}^2 + nv} \\ &= \frac{2v[4v^2\chi - c_{22}^2] + 2vn[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]}{[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv][4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]} \\ &= \frac{2v(n+1)[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]}{[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv][4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]} \\ &= \frac{2v(n+1)}{4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v} \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

A partir de las Proposiciones 4.6, 4.7, 4.8 y 4.10, obtenemos que la familia de polinomios matriciales mónicos es autofunción del operador diferencial D con $C = \begin{pmatrix} c_{22} & 1 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $U = -vI$, con

autovalor $\Lambda_n = \begin{pmatrix} (n-1)v & 0 \\ 0 & nv \end{pmatrix}$ y satisface la relación de recurrencia (3.6), donde

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{-n[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n-1)v]}{v[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} & 0 \\ 0 & \frac{-n[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]}{v[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{-c_{22}}{v} & \frac{-1}{v} \\ \frac{-2v(4v^{\frac{3}{2}}\chi - c_{22}^2)}{[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv][4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]} & \frac{-c_{22}}{v} \end{pmatrix}.$$

Y la norma de los polinomios es

$$S_n = n! \sqrt{2\pi} e^{-\frac{c_{22}^2}{2v}} \begin{pmatrix} \frac{4v^2 \chi - c_{22}^2}{(-v)^{\frac{2n+1}{2}} [4v^2 \chi - c_{22}^2 + nv]} & 0 \\ 0 & \frac{4v^2 \chi - c_{22}^2 + (n+1)v}{4(-v)^{\frac{2n+5}{2}}} \end{pmatrix}.$$

4.1.2. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ es inversible y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ es no inversible, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Probaremos que este caso y el visto en la Subsección 4.1.1 son similares vía conjugación. Notemos que $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ es no inversible si $n(u_1 - u_2) - (u_1 - v) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, es decir, $u_1 = u_2 = v$. Procedemos de similar manera al caso anterior.

Proposición 4.11. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}[x]$ una familia de polinomios matriciales mónicos, con $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, $T_k^n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, autofunción del operador diferencial definido en (4.2), con autovalor diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}$. Si $u_1 = u_2 = v$, entonces $c_{12} = 0$.

Demostración. Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$. Consideramos $T_k^n = [F_k^n : G_k^n]$, donde $F_k^n, G_k^n \in \mathbb{C}^2$. Si desarrollamos la ecuación (4.7) de la Proposición 4.4, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-1}^n(1) \\ G_{n-1}^n(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix}.$$

De esta ecuación tenemos que $nc_{12} = 0$, de donde se deduce que $c_{12} = 0$. □

Por lo tanto, la familia de polinomios mónicos P_n es autofunción del operador diferencial a izquierda

$$D = I \frac{d^2}{dx^2} + (C - xU) \frac{d}{dx} - V,$$

con autovalor $\Lambda_n = \begin{pmatrix} -(n+1)v & 0 \\ 0 & -nv \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Y de manera similar al caso anterior, vía conjugación, podemos considerar que $c_{21} = 1$.

Proposición 4.12. Sean \tilde{D} el operador diferencial a izquierda definido en (4.10) y

$$\hat{D} = I \frac{d^2}{dx^2} + (\hat{C} - x\hat{U}) \frac{d}{dx} - \hat{V} \tag{4.16}$$

con $\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & 0 \\ 1 & \hat{c}_{22} \end{pmatrix}$, $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{v} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\hat{U} = \hat{v}I$. Si $\hat{c}_{11} = c_{22}$, $\hat{c}_{22} = c_{11}$ y $\hat{v} = -v$, entonces los operadores diferenciales son similares vía conjugación.

Demostración. Por lo visto en la Observación 4.1, sumando $\hat{v}IP_n(x)$, podemos considerar el operador \hat{D} , como

$$\hat{D} = I \frac{d^2}{dx^2} + (\hat{C} - x\hat{U}) \frac{d}{dx} - \check{V}$$

donde $\check{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hat{v} \end{pmatrix}$.

Ahora, buscamos una matriz inversible M tal que

$$M^{-1}VM = \check{V},$$

y

$$M^{-1}(C - xU)M = \hat{C} - x\hat{U}.$$

Basta tomar $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$. Luego, considerando que $\hat{c}_{11} = c_{22}$ y $\hat{c}_{22} = c_{11}$, se verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \check{V}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} + xv & 1 \\ 0 & c_{22} + xv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{22} + xv & 0 \\ 1 & c_{11} + xv \end{pmatrix} = \hat{C} - x\hat{U},$$

como queríamos probar. □

4.1.3. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son no inversibles, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Para que ambas matrices sean no inversibles debe verificarse al mismo tiempo que

$$n(u_2 - u_1) - (u_2 + v) = 0$$

$$n(u_1 - u_2) - (u_1 - v) = 0$$

Pero solo se cumple para todo $n \in \mathbb{N}_0$, si $u_1 = u_2 = v = 0$, lo que no es posible, ya que por lo visto en la Proposición 4.5 los elementos u_1 y u_2 son no nulos. Por lo tanto, no es posible que $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ sean singulares de manera simultánea $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

4.1.4. $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son inversibles, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 4.13. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}[x]$ una familia de polinomios matriciales mónicos, con

$P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$, $T_k^n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, autofunción del operador diferencial definido en (4.2), con autovalor diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}$. Si $ku_1 - nu_2 + v \neq 0$ y $-nu_1 + ku_2 - v \neq 0$, para $k = n-1, n-2$, y $\forall n \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$T_{n-1}^n = n \begin{pmatrix} -\frac{c_{11}}{u_1} & \frac{c_{12}}{(n-1)u_1 - nu_2 + v} \\ -\frac{c_{21}}{nu_1 - (n-1)u_2 + v} & -\frac{c_{22}}{u_2} \end{pmatrix},$$

$$T_{n-2}^n = n(n-1) \begin{pmatrix} \frac{u_1 c_{12} c_{21} + (c_{11}^2 - u_1)[nu_1 - (n-1)u_2 + v]}{2u_1^2(nu_1 - (n-1)u_2 + v)} & \frac{c_{12}[u_2 c_{11} - c_{22}((n-1)u_1 - nu_2 + v)]}{u_2[(n-1)u_1 - nu_2 + v][(n-2)u_1 - nu_2 + v]} \\ \frac{c_{21}[u_1 c_{22} - c_{11}(-nu_1 + (n-1)u_2 - v)]}{u_1[-nu_1 + (n-1)u_2 - v][-nu_1 + (n-2)u_2 - v]} & \frac{-c_{22}^2[(n-1)u_1 - nu_2 + v] + u_2[c_{12}c_{21} + (n-1)u_1 - nu_2 + v]}{2u_2^2[-(n-1)u_1 + nu_2 - v]} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n T_k^n x^k$. Consideramos $T_k^n = (F_k^n : G_k^n)$, donde $F_k^n, G_k^n \in \mathbb{C}^2$.

Si $ku_1 - nu_2 + v \neq 0$ y $-nu_1 + ku_2 - v \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$, las matrices $(\lambda_n I - \Lambda_k)$ y $(\mu_n I - \Lambda_k)$ son inversibles. Si desarrollamos las ecuaciones de la Proposición 4.4 para $k = n-1$ y $k = n-2$, obtenemos

$$\begin{aligned} F_{n-1}^n &= (\lambda_n I - \Lambda_{n-1})^{-1} \begin{pmatrix} nc_{11} \\ nc_{21} \end{pmatrix}; \\ G_{n-1}^n &= (\mu_n I - \Lambda_{n-1})^{-1} \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix}; \\ F_{n-2}^n &= (\lambda_n I - \Lambda_{n-2})^{-1} \left[\begin{pmatrix} n(n-1) \\ 0 \end{pmatrix} + (n-1)CF_{n-1}^n \right]; \\ G_{n-2}^n &= (\mu_n I - \Lambda_{n-2})^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ n(n-1) \end{pmatrix} + (n-1)CG_{n-1}^n \right]. \end{aligned}$$

Al resolver, obtenemos los valores para $F_{n-1}^n, F_{n-2}^n, G_{n-1}^n$ y G_{n-2}^n . Así, tenemos que

$$T_{n-1}^n = [F_{n-1}^n : G_{n-1}^n] = n \begin{pmatrix} -\frac{c_{11}}{u_1} & \frac{c_{12}}{(n-1)u_1 - nu_2 + v} \\ -\frac{c_{21}}{nu_1 - (n-1)u_2 + v} & -\frac{c_{22}}{u_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_{n-2}^n &= [F_{n-2}^n : G_{n-2}^n] \\ &= n(n-1) \begin{pmatrix} \frac{u_1 c_{12} c_{21} + (c_{11}^2 - u_1)[nu_1 - (n-1)u_2 + v]}{2u_1^2(nu_1 - (n-1)u_2 + v)} & \frac{c_{12}[u_2 c_{11} - c_{22}((n-1)u_1 - nu_2 + v)]}{u_2[(n-1)u_1 - nu_2 + v][(n-2)u_1 - nu_2 + v]} \\ \frac{c_{21}[u_1 c_{22} - c_{11}(-nu_1 + (n-1)u_2 - v)]}{u_1[-nu_1 + (n-1)u_2 - v][-nu_1 + (n-2)u_2 - v]} & \frac{-c_{22}^2[(n-1)u_1 - nu_2 + v] + u_2[c_{12}c_{21} + (n-1)u_1 - nu_2 + v]}{2u_2^2[-(n-1)u_1 + nu_2 - v]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Ahora, una vez hallados estos coeficientes, calculamos las matrices B_n y A_n de la relación de recurrencia y tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.14. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos autofunción del operador diferencial (4.2) y que verifica la relación de recurrencia*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

donde $P_{-1}(x) = \theta, P_0(x) = I$. Entonces,

- A_n es diagonal si $c_{11} = \frac{c_{22}u_1}{u_2}$
- La matriz $S_n B_n$ es hermítica siempre que $c_{11}, c_{22} \in \mathbb{R}$ y

$$c_{12}(u_1 - v) \frac{s_1^n}{s_2^n} = \frac{\overline{c_{21}}(u_1 + v)[nu_1 - (n+1)u_2 + v][(n-1)u_1 - nu_2 + v]}{[nu_1 - (n-1)u_2 + v][(n+1)u_1 - nu_2 + v]} \quad (4.17)$$

donde s_1^n y s_2^n son los elementos de la diagonal de S_n .

Demostración. Del Corolario 3.7, tenemos que $B_n = T_{n-1}^n - T_n^{n+1}$ y $A_n = T_{n-2}^n - T_{n-1}^{n+1} - T_{n-1}^n B_n$.

En primer lugar, buscamos que A_n sea diagonal. Para esto calculamos cuándo los términos $A_{n[12]}$ y $A_{n[21]}$ se anulan.

$$A_{n[12]} = \frac{nc_{12}(c_{11}u_2 - c_{22}u_1) [(n-1)u_1^2 + (nu_2 - v)v + u_1(u_2 - nu_2 - (n-2)v)]}{u_1u_2 [(n-2)u_1 - nu_2 + v] [(n-1)u_1 - nu_2 + v] [(n-1)u_1 - (n+1)u_2 + v]} = 0$$

$$A_{n[21]} = \frac{nc_{21}(c_{22}u_1 - c_{11}u_2) [-((n-1)u_2 - v)(u_2 + v) + u_1((n-1)u_2 + nv)]}{u_1u_2 [nu_1 - (n-1)u_2 + v] [nu_1 - (n-2)u_2 + v] [(n+1)u_1 - (n-1)u_2 + v]} = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, con ayuda de un software para cálculos algebraicos, calculamos los coeficientes de las potencias de n en el numerador de cada término y resolvimos cuándo se anulan estos coeficientes. Descartamos los casos que no verifican las hipótesis o que reducen al caso clásico, y obtenemos que A_n es diagonal si $u_2c_{11} = u_1c_{22}$. Como $u_2 \neq 0$, lo reescribimos como $c_{11} = \frac{u_1c_{22}}{u_2}$.

Por otro lado, buscamos que $S_n B_n$ sea hermítica, tenemos que

$$S_n B_n = \begin{pmatrix} \frac{s_1^n c_{11}}{u_1} & \frac{s_1^n c_{12}(u_1 - v)}{[nu_1 - (n+1)u_2 + v][(n-1)u_1 - nu_2 + v]} \\ \frac{s_2^n c_{21}(u_2 + v)}{[nu_1 - (n-1)u_2 + v][(n+1)u_1 - nu_2 + v]} & \frac{s_2^n c_{22}}{u_2} \end{pmatrix}$$

por lo tanto, es hermítica si $c_{11}, c_{22} \in \mathbb{R}$ y

$$c_{12} \frac{s_1^n}{s_2^n} = \frac{\overline{c_{21}}(u_1 + v) [nu_1 - (n+1)u_2 + v] [(n-1)u_1 - nu_2 + v]}{(u_1 - v) [nu_1 - (n-1)u_2 + v] [(n+1)u_1 - nu_2 + v]}$$

□

Observemos que, de la ecuación (4.17), podemos deducir que $c_{12} \neq 0$, pues en caso contrario tenemos que $\overline{c_{21}} = 0$. Si esto ocurre, el operador diferencial queda diagonal y reduce al caso clásico.

En la siguiente proposición analizamos el caso en que A_n es diagonal.

Proposición 4.15. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos autofunción del operador diferencial D definido en (4.2) y verifica la relación de recurrencia*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

con $P_{-1}(x) = \theta$ y $P_0(x) = I$. Si $c_{11} = \frac{c_{22}u_1}{u_2}$, entonces el operador diferencial es diagonal y reduce al caso clásico.

Demostración. Sea $c_{11} = \frac{c_{22}u_1}{u_2}$. De la relación de recurrencia tenemos que

$$P_{n+1} = P_n(xI - B_n) - P_{n-1}A_n$$

Y de que $B_n = T_{n-1}^n - T_n^{n+1}$ y $A_n = T_{n-2}^n - T_{n-1}^{n+1} - T_{n-1}^n B_n$, utilizando un software de cálculos algebraicos, calculamos cuándo $D(P_n) = P_n \Lambda_n$. Tenemos que esta ecuación se verifica para $n = 0, 1, 2$.

Ahora, para $n = 3$, las entradas de la matriz $D(P_3(x)) - P_3(x)\Lambda_3$ son,

$$\begin{aligned} [D(P_3(x)) - P_3(x)\Lambda_3]_{[1,1]} &= 0 \\ [D(P_3(x)) - P_3(x)\Lambda_3]_{[1,2]} &= \frac{c_{12} [u_2(c_{12}c_{21} + u_2 - v)v + u_1^2(3u_2 + v) + u_1(-3u_2^2 - 2u_2v + v(c_{12}c_{21} + v))]}{(u_1u_2(u_2 - v)(u_1 - 2u_2 + v))} \\ [D(P_3(x)) - P_3(x)\Lambda_3]_{[2,1]} &= \frac{c_{21} [u_2(c_{12}c_{21} + u_2 - v)v + u_1^2(3u_2 + v) + u_1(-3u_2^2 - 2u_2v + v(c_{12}c_{21} + v))]}{(u_1u_2(u_1 + v)(2u_1 - u_2 + v))} \\ [D(P_3(x)) - P_3(x)\Lambda_3]_{[2,2]} &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos cuándo se anulan las entradas $[1, 2]$ y $[2, 1]$, descartamos los casos que no verifican las hipótesis o reducen al caso clásico. Obtenemos que se anulan si

$$c_{21} = \frac{u_2v(-u_2 + v) - u_1^2(3u_2 + v) + u_1(3u_2^2 + 2u_2v - v^2)}{c_{12}(u_1 + u_2)v}.$$

Reemplazamos este valor y analizamos $D(P_4(x)) = P_4\Lambda_4$. Ahora, esta ecuación se verifica si $u_1 = u_2$, pero al reemplazar este valor en c_{21} este se anula.

Así, la ecuación $D(P_4(x)) = P_4\Lambda_4$ se cumple si $c_{21} = 0$, y de la condición (4.17) para que la matriz S_nB_n sea hermítica, tenemos que $c_{12} = 0$. Por lo tanto, reduce al caso clásico. \square

Concluimos entonces que si las matrices $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son inversibles $\forall n \in \mathbb{N}_0$, las condiciones para que la matriz A_n de la relación de recurrencia de tres términos sea diagonal hacen que el operador diferencial sea diagonal, lo que reduce al caso clásico. Por lo tanto, no existen familias únicas de polinomios matriciales mónicos que sean autofunción del operador diferencial (4.2).

El siguiente teorema engloba la respuesta a la hipótesis planteada al inicio de este capítulo.

Teorema 4.16. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos autofunción del operador diferencial*

$$D = I \frac{d^2}{dx^2} + (C - xU) \frac{d}{dx} - V$$

donde $C = \begin{pmatrix} c_{22} & 1 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c_{22} \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^-$, con autovalor diagonal

$\Lambda_n = \begin{pmatrix} (n-1)v & 0 \\ 0 & nv \end{pmatrix}$. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones

- Los polinomios son ortogonales respecto al peso

$$W(x) = e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22} + vx}{2v} \\ \frac{c_{22} + vx}{2v} & \frac{4v\chi + 2c_{22}x + vx^2}{4v} \end{pmatrix}$$

con $\chi > \frac{c_{22}^2}{4v^2}$;

- El operador diferencial D es simétrico respecto al peso W ;
- La familia de polinomios verifica la relación de recurrencia

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

donde

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{-c_{22}}{v} & \frac{-1}{v} \\ \frac{-2v(4v^2\chi - c_{22}^2)}{[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv][4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]} & \frac{-c_{22}}{v} \end{pmatrix}$$
$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{-n[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n-1)v]}{v[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} & 0 \\ 0 & \frac{-n[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]}{v[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 5

Conclusiones

En esta sección presentamos los resultados más destacados del Capítulo 4.

Dada una sucesión de polinomios matriciales mónicos $P_n(x) = [F_n(x) : G_n(x)]$, con $F_n(x), G_n(x) \in \mathbb{C}^2[x]$, que son autofunción de la ecuación diferencial

$$I \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) + (C - xU) \frac{d}{dx} P_n(x) - V P_n(x) = P_n(x) \Lambda_n$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y $U, V, \Lambda_n \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{\theta\}$, con

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

y

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} -nu_1 - v & 0 \\ 0 & -nu_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, los coeficientes del término $n - 1$ de $F_n(x)$ y $G_n(x)$ verifican

$$(\lambda_n I - \Lambda_{n-1}) F_{n-1}^n = \begin{pmatrix} nc_{11} \\ nc_{21} \end{pmatrix}$$

$$(\mu_n I - \Lambda_{n-1}) G_{n-1}^n = \begin{pmatrix} nc_{12} \\ nc_{22} \end{pmatrix}$$

- Si $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son matrices inversibles $\forall n \in \mathbb{N}_0$, y además la familia de polinomios $P_n(x)$ satisface una relación de recurrencia de tres términos, entonces reduce al caso clásico.

- Si las matrices $(\lambda_n I - \Lambda_{n-1})$ y $(\mu_n I - \Lambda_{n-1})$ son una de ellas inversible y la otra no, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, entonces existen infinitas familias de polinomios matriciales mónicos autofunción del operador diferencial con $u_1 = u_2 = -v$ y $C = \begin{pmatrix} c_{22} & 1 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$, es decir, son autofunción de

$$I \frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} c_{22} + xv & 1 \\ 0 & c_{22} + xv \end{pmatrix} \frac{d}{dx} - V$$

con autovalor

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} (n-1)v & 0 \\ 0 & nv \end{pmatrix}$$

Además, verifican las siguientes propiedades:

- Son ortogonales respecto al peso matricial

$$W(x) = e^{c_{22}x + \frac{v}{2}x^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}+vx}{2v} \\ \frac{c_{22}+vx}{2v} & \frac{4v\chi + 2c_{22}x + vx^2}{4v} \end{pmatrix}$$

con $\chi > \frac{c_{22}^2}{4v^2}$

- Verifican una relación de recurrencia de tres términos de la forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

donde $P_{-1}(x) = \theta$, $P_0(x) = I$ y

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{-c_{22}}{v} & \frac{-1}{v} \\ \frac{-2v(4v^2\chi - c_{22}^2)}{[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv][4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]} & \frac{-c_{22}}{v} \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{-n[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n-1)v]}{v[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} & 0 \\ 0 & \frac{-n[4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v]}{v[4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} \end{pmatrix}$$

- La norma de los polinomios es

$$S_n = n! \sqrt{2\pi} e^{-\frac{c_{22}^2}{2v}} \begin{pmatrix} \frac{4v^2\chi - c_{22}^2}{(-v)^{\frac{2n+1}{2}} [4v^2\chi - c_{22}^2 + nv]} & 0 \\ 0 & \frac{4v^2\chi - c_{22}^2 + (n+1)v}{4(-v)^{\frac{2n+5}{2}}} \end{pmatrix}$$

Y por lo visto en el Teorema 4.16, esta familia es la única que verifica las hipótesis de nuestro problema, salvo conjugación. En las publicaciones [3, 12, 20, 28] se encuentran ejemplos de la familia de polinomios hallada en este trabajo.

Bibliografía

- [1] Bateman, H. (1953). Higher transcendental functions [volumes i-iii] (Vol. 1). McGraw-Hill Book Company.
- [2] Bochner, S. (1929). Über sturm-liouvillesche polynomsysteme. *Mathematische Zeitschrift*, 29(1), 730-736.
- [3] Borrego, J., Castro, M., Durán, A. J. (2012). Orthogonal matrix polynomials satisfying differential equations with recurrence coefficients having non-scalar limits. *Integral Transforms and Special Functions*, 23(9), 685-700.
- [4] Borwein, P., Erdélyi, T. (1995). *Polynomials and polynomial inequalities* (Vol. 161). Springer Science and Business Media.
- [5] Branquinho, A. J. P. L. (2008). *Coimbra lecture notes on Orthogonal Polynomials*. Nova Publishers.
- [6] Calderón, C., González, Y., Pacharoni, I., Simondi, S., Zurrián, I. (2019). 2×2 hypergeometric operators with diagonal eigenvalues. *Journal of approximation theory*, 248, 105299.
- [7] Cantero, M. J., Moral, L., Velázquez, L. (2007). Matrix orthogonal polynomials whose derivatives are also orthogonal. *Journal of Approximation Theory*, 146(2), 174-211.
- [8] Carathéodory, C. (2001). *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume 2* (Vol. 2). American Mathematical Soc..
- [9] Carlson, B. C. (1977). *Special functions of applied mathematics*.
- [10] Casper, W. R. (2018). Elementary examples of solutions to Bochner's problem for matrix differential operators. *Journal of Approximation Theory*, 229, 36-71.
- [11] Casper, W. R. (2019). The Symmetric 2×2 Hypergeometric Matrix Differential Operators. arXiv preprint arXiv:1907.12703.
- [12] Castro, M. M., Grünbaum, F. A. (2005). Orthogonal matrix polynomials satisfying first order differential equations: a collection of instructive examples. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 12(sup2), 63-76.
- [13] Castro, M. M., Grünbaum, F. A. (2006). The algebra of differential operators associated to a family of matrix-valued orthogonal polynomials: five instructive examples. *International Mathematics Research Notices*, 2006, 47602.

- [14] Chihara, T. S. (2011). An introduction to orthogonal polynomials. Courier Corporation.
- [15] Durán, A. J. (1993). A Generalization of Favard' s Theorem for Polynomials Satisfying a Recurrence Relation. *Journal of approximation theory*, 74(1), 83-109.
- [16] Durán, A. J. (1997). Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential operator. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 585-600.
- [17] Durán, A. (2009). A Method to Find Weight Matrices Having Symmetric Second-Order Differential Operators with Matrix Leading Coefficient. *Constructive Approximation*, 29(2).
- [18] Durán, A. J. (2010). Rodrigues' formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations. *International Mathematics Research Notices*, 2010(5), 824-855.
- [19] Durán, A. J., de la Iglesia, M. D. (2007). Second order differential operators having several families of orthogonal matrix polynomials as eigenfunctions. arXiv preprint arXiv:0711.1763.
- [20] Durán, A. J., Grünbaum, F. A. (2004). Orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations. *International Mathematics Research Notices*, 2004(10), 461-484.
- [21] Durán, A. J., Grünbaum, F. A. (2005). A characterization for a class of weight matrices with orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations. *International Mathematics Research Notices*, 2005(23), 1371-1390.
- [22] Durán, A. J., Grünbaum, F. A. (2005). Orthogonal matrix polynomials, scalar-type Rodrigues' formulas and Pearson equations. *Journal of Approximation Theory*, 134(2), 267-280.
- [23] Durán, A. J., Grünbaum, F. A. (2007). Matrix orthogonal polynomials satisfying second-order differential equations: Coping without help from group representation theory. *Journal of approximation theory*, 148(1), 35-48.
- [24] Durán, A. J., Lopez-Rodriguez, P. (2007). Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations, II. *Constructive Approximation*, 26(1), 29-47.
- [25] František, D. (2009). Infinite series: Convergence tests. *Katedra Informatiky, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava*.
- [26] Grünbaum, F. A., Pacharoni, I., Tirao, J. (2003). Matrix valued orthogonal polynomials of the Jacobi type. *Indagationes Mathematicae*, 14(3-4), 353-366.
- [27] Hoffman, K., Kunze, R., Finsterbusch, H. E. (1973). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- [28] Ismail, M. E., Koelink, E., Román, P. (2019). Matrix valued Hermite polynomials, Burchnell formulas and non-abelian Toda lattice. *Advances in Applied Mathematics*, 110, 235-269.
- [29] Koelink, E., van Pruijssen, M., Román, P. (2012). Matrix-valued orthogonal polynomials related to $(SU(2) \times SU(2), \text{diag})$. *International Mathematics Research Notices*, 2012(24), 5673-5730.
- [30] Koelink, E., Van Pruijssen, M., Román, P. (2013). Matrix-valued Orthogonal Polynomials Related to $(SU(2) \times SU(2), \text{diag})$, II. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 49(2), 271-312.

- [31] Krein, M. G. (1949). Infinite J-matrices and the matrix problem of moments. In *Doklady Akad. Nauk SSSR* (Vol. 69, pp. 125-128).
- [32] Morey, L. (2019). *Propiedades analíticas y estructurales de polinomios ortogonales matriciales* (Bachelor's thesis).
- [33] Nikiforov, A. F., Uvarov, V. B. (1988). *Special functions of mathematical physics* (Vol. 205). Basel: Birkhäuser.
- [34] Rao, K. S., Ramanujan, S. (2021). *Life and Work of a Natural Mathematical Genius*, Swayambhu.
- [35] Sanchez Salas, J. L. (2013). *Polinomios ortogonales*.
- [36] Sayyed, K., Metwally, M., Batahan, R. (2003). On generalized Hermite matrix polynomials. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 10, 272-279.
- [37] Srivastava, H. M., Karlsson, P. W. (1985). *Multiple Gaussian hypergeometric series*. E. Horwood.
- [38] Srivastava, H. M., Manocha, L. (1988). A treatise on generating functions. *Bull. Amer. Math. Soc.(NS)*, 19(1), 346-348.
- [39] Szego, G. (1959). *Orthogonal polynomials*. In *Amer. Math. Soc. Colloquium*, 1959.
- [40] Tirao, J., Zurrián, I. (2018). Reducibility of matrix weights. *The Ramanujan Journal*, 45(2), 349-374.
- [41] Torres, A. V. (2017). *Polinomios ortogonales confluentes matriciales*. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.